1 Вводная лекция

2 Классическая струна Полякова

3 Основные идеи квантовой теории струн

3.1 Решения классических уравнений движения

Действие классической струны Полякова

$$S[X,g] = -\tfrac{1}{2}\, T \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \tag{3.1}$$

Вычислили вариацию по метрике на мировом дисте

$$\begin{gathered} t_{\alpha\beta} = -\frac{1}{T\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}} S[X,g] = \\ = \tfrac{1}{2}\left(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\alpha'\beta'} \partial_{\alpha'} X^\mu \partial_{\beta'} X_\mu\right) = 0 \end{gathered} \tag{3.2}$$

Уравнения движения по координатам струны

$$\begin{gathered} \delta_X S[X,g] = -T \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \delta X^\mu \partial_\beta X_\mu = \\ = -T \int_\Sigma d^2\sigma \partial_\alpha \left(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta X^\mu \partial_\beta X_\mu\right) + \\ +T \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{-g} \delta X^\mu \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta X_\mu \end{gathered} \tag{3.3}$$

Таким образом - решить нужно двумерные уравнения Лапласа

$$\Delta X^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu = 0 \tag{3.4}$$

или его продолжение в пространство Минковского - волновое уравнение

$$\partial_\tau^2 X^\mu - \partial_\sigma^2 X^\mu = 0, \qquad \mu = 0, 1, \ldots, D-1 \tag{3.5}$$

где мы воспользовались тем, что с помощью репараметризационной инвариантности метрику на мировом листе можно выбрать в конформно-плоском виде

$$ds^2 = \rho(\sigma,\tau)\left(d\sigma^2 - d\tau^2\right) \tag{3.6}$$

а благодаря двумерной вейлевской симметрии классической действие вообще не зависит от $\rho(\sigma,\tau)$. Для начала посмотрим на свободную струну, распространяющуюся в "мировом времени" $-\infty < \tau < \infty$, а параметр $0 \le \sigma \le l$ пусть ограничен произвольным l. Естественными граничными условиями будут

$$\begin{aligned} X^\mu(\sigma + l,\tau) &= X^\mu(\sigma,\tau), \qquad \text{closed string} \\ \partial_\sigma X^\mu(\sigma,\tau)\big|_{\sigma=0,l} &= 0, \qquad \text{open string} \end{aligned} \tag{3.7}$$

в случае открытой струны - простейшие граничные условия, отвечающие свободному движению в D-мерном пространстве Минковского. Можно сделать преобразование Фурье по направлению σ

- $X^\mu(\sigma + l,\tau) = X^\mu(\sigma,\tau)$, замкнутая струна, в разложении Фурье $X^\mu(\sigma,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{2\pi i n\sigma}{l}\right) X^\mu_n(\tau)$, $\bar{X}^\mu_n = X^\mu_{-n}$;
- $\partial_\sigma X^\mu\big|_{\sigma=0,l} = 0$, открытая струна, в разложении Фурье $X^\mu(\sigma,\tau) = X^\mu_0(\tau) + 2\sum_{n>0} \cos\left(\frac{\pi n\sigma}{l}\right) X^\mu_n(\tau)$.

В случае открытой струны - бесконечный набор релятивистских волн-частиц, в случае замкнутой - "дважды бесконечный" набор. Для замкнутой струны решения будут иметь вид

$$\begin{gathered} X^\mu_n(\tau) = -\frac{i}{n}\left(\alpha^\mu_n e^{-\frac{2\pi i n\tau}{l}} - \tilde{\alpha}^\mu_{-n} e^{\frac{2\pi i n\tau}{l}}\right), \quad n \neq 0 \\ \bar{\alpha}^\mu_n = \alpha^\mu_{-n}, \qquad \overline{\tilde{\alpha}}^\mu_n = \tilde{\alpha}^\mu_{-n} \\ X^\mu_0(\tau) = x^\mu + p^\mu\tau = x^\mu + \frac{P^\mu}{lT}\tau \end{gathered} \tag{3.8}$$

а для открытой

$$\begin{gathered} X^\mu_n(\tau) = \frac{i}{n}\left(\alpha^\mu_n e^{-\frac{\pi i n\tau}{l}} - \alpha^\mu_{-n} e^{\frac{\pi i n\tau}{l}}\right), \quad n > 0, \qquad \bar{\alpha}^\mu_n = \alpha^\mu_{-n} \\ X^\mu_0(\tau) = x^\mu + p^\mu\tau = x^\mu + \frac{P^\mu}{lT}\tau \end{gathered} \tag{3.9}$$

Перейдем, наконец, в двумерное евклидово пространство ($\tau = -it$) - тогда решение для замкнутой струны можно написать как

$$\begin{aligned} X^\mu(t,\sigma) &= x^\mu - ip^\mu t + i\sum_{n\neq 0}\left(\frac{\alpha_n^\mu}{n}e^{-\frac{2\pi n}{l}(t+i\sigma)} + \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{n}e^{-\frac{2\pi n}{l}(t-i\sigma)}\right) = \\ &\underset{z=\exp(\frac{2\pi}{l}(t+i\sigma))}{=} x^\mu - \frac{ilp^\mu}{2\pi}\log|z| + i\sum_{n\neq 0}\left(\frac{\alpha_n^\mu}{n}z^{-n} + \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{n}\bar{z}^{-n}\right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

гармоническую функцию в комплексной z-плоскости без нуля или на сфере Римана с двумя отмеченными точками $z = 0$ и $z = \infty$ (на цилиндре). Например, в окрестности нуля функция (3.10) (при нулевых отрицательных $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n = 0$, $n < 0$) удовлетворяет уравнению

$$\Delta X^\mu = -ilp^\mu\delta^{(2)}(z) = -\frac{i}{T}P^\mu\delta^{(2)}(z) \tag{3.11}$$

Если вдобавок наложить такое же условие в $z = \infty$, то решением будет "струна без гармоник", т.е. $X^\mu(z,\bar{z}) = x^\mu - \frac{ilp^\mu}{2\pi}\log|z|$.

Это означает, что на самом деле мы решали модифицированную задачу, которую в общем случае граничных условий "без гармоник" можно записать как

$$\Delta X^\mu = -\frac{i}{T}\sum_j P_j^\mu\delta^{(2)}(z - z_j) \tag{3.12}$$

и искать как экстремальную конфигурацию для модифицированного действия (в евклиде на мировом листе)

$$S[X|P] = \frac{T}{2}\int_\Sigma d^2z\partial_\alpha X^\mu\partial_\alpha X_\mu - i\sum_j P_j^\mu X_\mu(z_j) \tag{3.13}$$

Для того чтобы вычислить действие (3.13) нужно научиться решать задачу (3.12).

3.2 Вычисление действия замкнутой струны

Мы хотим вычислить частный случай общего выражения

$$\begin{gathered} S[X|J] = \frac{T}{2}\int_\Sigma d^2z\partial_\alpha X^\mu\partial_\alpha X_\mu + \int_\Sigma d^2zJ_\mu X^\mu \\ T\Delta X^\mu(z,\bar{z}) = J^\mu(z,\bar{z}) \end{gathered} \tag{3.14}$$

что практически тривиально

$$
\begin{aligned}
S[X|J] = \frac{T}{2}\int_\Sigma d^2z\partial_\alpha X^\mu \partial_\alpha X_\mu + \int_\Sigma d^2z J_\mu X^\mu = \\
= \frac{T}{2}\int_\Sigma d^2z X^\mu(-\Delta)X_\mu + \int_\Sigma d^2z J_\mu X^\mu = \tfrac{1}{2}\int_\Sigma d^2z J_\mu X^\mu = \\
= \tfrac{1}{2}\int d^2z d^2w J_\mu(z) G(z,w) J^\mu(w)
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

где $X^\mu(z) = \int d^2w G(z,w) J^\mu(w)$ решение уравнения в (3.14) при условии

$$
T\Delta_z G(z,w) = \delta^{(2)}(z-w) \tag{3.16}
$$

которое мы уже решили (только локально!) в виде

$$
G(z,w) = \frac{1}{2\pi T}\log|z-w| \tag{3.17}
$$

Это дает нам формальное решение действия (3.13)

$$
\begin{aligned}
S[X|P] = \frac{1}{4\pi T}\int d^2z d^2w J_\mu(z)\log|z-w| J^\mu(w)\Big|_{J^\mu(z)=-i\sum_j P_j^\mu \delta^{(2)}(z-z_j)} = \\
= -\frac{1}{4\pi T}\sum_{j,k} P_j\cdot P_k \log|z_j - z_k| = \\
= -\frac{1}{4\pi T}\sum_j P_j^2 \log\epsilon_j - \frac{1}{2\pi T}\sum_{j<k} P_j\cdot P_k\log|z_j-z_k|
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

или, используя $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$,

$$
\exp(-S[X|P;\{z_j\}]) = \prod_j \epsilon_j^{\alpha' P_j^2/2}\prod_{j<k}|z_j - z_k|^{\alpha' P_j\cdot P_k} \tag{3.19}
$$

3.3 Действие открытой струны

Что изменится для открытой струны? Разложение (3.10) будет иметь вид

$$
X^\mu(t,\sigma) \underset{z=\exp(\frac{\pi}{l}(t+i\sigma))}{=} x^\mu - \frac{ilp^\mu}{\pi}\log|z| + i\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^\mu}{n}(z^{-n}+\bar{z}^{-n}) \tag{3.20}
$$

где теперь отображение $z = \exp(\frac{\pi}{l}(t + i\sigma))$ переводит полосу $0 \leq \sigma \leq l$ в верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im} z \geq 0$. На её границе (3.20) удовлетворяет условиям Неймана на токи

$$\partial X^\mu = -\frac{ilp^\mu}{2\pi}\frac{1}{z} - i\sum_{n\neq 0}\alpha_n^\mu z^{-n-1}, \qquad \bar{\partial} X^\mu = -\frac{ilp^\mu}{2\pi}\frac{1}{\bar{z}} - i\sum_{n\neq 0}\alpha_n^\mu \bar{z}^{-n-1} \tag{3.21}$$

а именно

$$\left(\partial X^\mu - \bar{\partial} X^\mu\right)\big|_{\partial\Sigma} = \left(\partial X^\mu - \bar{\partial} X^\mu\right)\big|_{z=\bar{z}} = 0 \tag{3.22}$$

Задача о нахождении действия решается аналогично случаю замкнутой струны, где теперь все точки $\{z_j = \xi_j\}$ можно считать находящимися на границе $\mathrm{Im}\xi_j = 0$ [1], а вместо наивной функции Грина (3.17) следует воспользоваться функцией Грина $G_N(z, w)$ задачи Неймана в полуплоскости

$$G_N(z, w) = \frac{1}{2\pi T}\log|z - w||z - \bar{w}| \tag{3.23}$$

удовлетворяющей граничному условию

$$\begin{aligned} &\left(\partial_z G_N(z, w) - \bar{\partial}_{\bar{z}} G_N(z, w)\right)\big|_{\partial\Sigma} = \\ &= \left(\partial_z G_N(z, w) - \bar{\partial}_{\bar{z}} G_N(z, w)\right)\big|_{z=\bar{z}} = 0 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Вычисляя квадратичное действие для данной конфигурации открытой струны, очевидно получим

$$\begin{aligned} S[X|P] &= \frac{1}{4\pi T}\int d^2z d^2w J_\mu(z) G_N(z, w) J^\mu(w)\Big|_{J^\mu(z) = -i\sum_j P_j^\mu \delta^{(2)}(z-\xi_j)} = \\ &= -\frac{1}{2\pi T}\sum_j P_j^2 \log\epsilon_j - \frac{1}{\pi T}\sum_{j<k} P_j \cdot P_k \log|\xi_j - \xi_k| \end{aligned} \tag{3.25}$$

или, используя $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$,

$$\exp(-S[X|P; \{\xi_j\}]) = \prod_j \epsilon_j^{\alpha' P_j^2} \prod_{j<k} |\xi_j - \xi_k|^{2\alpha' P_j \cdot P_k} \tag{3.26}$$

Наша следующая задача - получить осмысленный результат в квантовой теории струн пользуясь полученным выражением - решением классической задачи.

[1] Строго говоря, следует решить задачу для точек “близких к границе” и потом совершить предельный переход.