1 Вводная лекция

2 Классическая струна Полякова

3 Основные идеи квантовой теории струн

4 Действие классической струны и квантовые амплитуды

4.1 Струнная постановка задачи

Глядя уже на классическую задачу, которую мы решили следует немедленно заметить следующее

- Решение уравнения $\Delta X^\mu = -\frac{i}{T}\sum_j P_j^\mu \delta^{(2)}(z - z_j)$ имеет смысл лишь при некоторых дополнительных условиях на правую часть, а именно $\sum_j P_j^\mu = 0$ (иначе зарабатывается дополнительная особенность $X^\mu \simeq \sum_j P_j^\mu \log|z| + \ldots$ при $|z| \to \infty$).
- Значение действия на конфигурации плохо определено, содержит кусок аналогичный энергии заряда в собственном поле, стандартный вывод - такая классическая задача несамосогласована.

На самом деле в теории струн мы хотим решать *квантовую* задачу - по крайней мере по постановке. Грубо говоря, это отвечает суммированию по всем конфигурациям, которое в главном приближении дается классическим действием:

$$\sum_{\text{paths}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}S\right) \sim \exp\left(-\frac{1}{\hbar}S_{\text{cl}}\right) \tag{4.1}$$

Вычисление модифицированного действия

$$e^{-S[X|P;\{\xi_j\}]} = \exp\left(-\frac{T}{2}\int_\Sigma d^2z \partial_\alpha X^\mu \partial_\alpha X_\mu\right) \prod_j \exp\left(iP_j^\mu X_\mu(\xi_j)\right) \tag{4.2}$$

на соответствующей классической конфигурации можно пытаться интерпретировать как взаимодействие некоторых плоских волн-частиц с импульсами $\{P_j^\mu\}$ с мировой поверхностью струны - открытой или замкнутой, а значание вычисленного действия - как амплитуду рассеяния. Плохо только, что полученные нами выражения буквально не годятся - так как *явно* зависят от координат на мировом листе.

Проект наивного ответа - например в теории открытой струны

$$\begin{aligned} A(\{P_j\}) &= \int \prod_j d\xi_j \exp(-S[X|P;\{\xi_j\}]) = \\ &= \prod_j \epsilon_j^{\alpha' P_j^2} \int_{\mathbb{R}} d\xi_j \prod_{j<k} |\xi_j - \xi_k|^{2\alpha' P_j \cdot P_k} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Вспомним теперь, что наблюдаемые величины в теории струн не должны зависеть от выбора координат на мировом листе. В частности это означает, что полученный интеграл должен как-то разумно вести себя при дробно-линейных преобразованиях

$$\xi_j \to \frac{a\xi_j + b}{c\xi_j + d}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \tag{4.4}$$

Очевидно при этом

$$\begin{aligned} d\xi_j &\to \frac{d\xi_j}{(c\xi_j + d)^2}, \qquad \forall j \\ \xi_j - \xi_k &\to \frac{\xi_j - \xi_k}{(c\xi_j + d)(c\xi_k + d)}, \qquad \forall j,k \end{aligned} \tag{4.5}$$

то есть

$$\begin{aligned} \prod_j d\xi_j \prod_{j<k} |\xi_j - \xi_k|^{2\alpha' P_j \cdot P_k} &\to \prod_j d\xi_j \prod_{j<k} |\xi_j - \xi_k|^{2\alpha' P_j \cdot P_k} \times \\ \times \prod_j \frac{1}{(c\xi_j + d)^2} &\times \prod_j \frac{1}{(c\xi_j + d)^{2\alpha' P_j \sum_{k\neq j} P_k}} \end{aligned} \tag{4.6}$$

или, проще говоря, интегранд в (4.3) домножается на

$$\prod_j \frac{1}{(c\xi_j + d)^{2(1-\alpha' P_j^2)}} \tag{4.7}$$

где мы использовали $\sum_k P_k = P_j + \sum_{k\neq j} P_k = 0$. Таким образом, интегранд оказывается инвариантным относительно дробно-линейных преобразований лишь когда "импульсы" всех внешних концов удовлетворяют условию массовой поверхности

$$\frac{1}{\alpha'} = P^\mu P_\mu = \mathbf{P}^2 - E^2 \tag{4.8}$$

то есть отвечают отрицательным квадратам массы или *тахионам.*

При этом интегральное выражение для амплитуды (4.3) оказывается "трехкратно переопределенным". С учетом этого вырождения можно написать для N-точечной амплитуды

$$\begin{gathered} A(P_1,\ldots,P_N) \sim \int \prod_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} d\xi_j \prod_{k=N-2,N-1,N} \delta(\xi_k - \xi_k^{(0)}) \left| \frac{\partial(\xi_{N-2},\xi_{N-1},\xi_N)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)} \right| \times \\ \times \prod_{j<k} |\xi_j - \xi_k|^{2\alpha' P_j\cdot P_k} \\ \delta\xi_k = \alpha + \beta\xi_k + \gamma\xi_k^2, \qquad k = N-2, N-1, N \end{gathered} \tag{4.9}$$

или попросту "забить" на лишние интегрирования в (4.3).

4.2 Амплитуда Венециано

Для $N = 4$ удобно выбрать $\xi_1^{(0)} = 0$, $\xi_3^{(0)} = 1$, $\xi_4^{(0)} = \infty$ и интегрировать по $\xi_2 = \xi$, в пределах $0 < \xi < 1$. Тогда результат будет иметь вид

$$\begin{gathered} A(P_1,\ldots,P_4) \sim \int_0^1 d\xi \xi^{2\alpha' P_1\cdot P_2}(1-\xi)^{2\alpha' P_2\cdot P_3} = \\ = \int_0^1 d\xi \xi^{-\alpha' s-2}(1-\xi)^{-\alpha' t-2} = B(-\alpha(s),-\alpha(t)) = \\ = \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s)-\alpha(t))} = A(s,t) \end{gathered} \tag{4.10}$$

где использована линейная функция $\alpha(x) = 1 + \alpha' x$ от переменных Мандельстама

$$\begin{aligned} s &= -(P_1+P_2)^2 = -\frac{2}{\alpha'} - 2P_1\cdot P_2 \\ t &= -(P_2+P_3)^2 = -\frac{2}{\alpha'} - 2P_2\cdot P_3 \end{aligned} \tag{4.11}$$

при $P^\mu P_\mu = \frac{1}{\alpha'}$.

При выводе (4.10) использовались следующие интегральные представления

$$\begin{aligned} B(\alpha,\beta) &= \int_0^1 d\xi \xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\ \Gamma(x) &= \int_0^\infty dt t^{x-1}e^{-t}, \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Действительно

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy\ x^{\alpha-1}y^{\beta-1}e^{-x-y} \underset{x=t\xi,\ y=t(1-\xi)}{=} \\ &= \int_0^\infty tdt \int_0^1 d\xi\ t^{\alpha+\beta-2}e^{-t}\xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{\beta-1} = \Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta) \end{aligned} \tag{4.13}$$

Формула (4.10) называется амплитудой Венециано, и пользуясь свойствами гамма-функции (4.12) её можно представить в виде

$$\begin{aligned} A(s,t) = -\sum_{n=0}^\infty \frac{(\alpha(t)+1)(\alpha(t)+2)\dots(\alpha(t)+n)}{n!}\frac{1}{\alpha(s)-n} \sim \\ \sim \sum_{n\geq -1} \frac{C_n}{s-\frac{n}{\alpha'}}(t^{n+1}+\dots) \end{aligned} \tag{4.14}$$

т.е. суммы по промежуточным резонансам с массами $-(P_1+P_2)^2 = M^2 = \frac{n}{\alpha'}$, $n = -1, 0, 1, 2, \dots$. Это естественно интерпретировать как наличие в спектре (открытой) струны частично-подобных состояний - начиная с тахиона, безмассового, и массивных состояний кратных массе Планка.

4.3 Выводы

- Самое простое решение в теории струн: свободная бозонная струна на полосе или цилиндре, распространяющаяся с импульсом центра масс P^μ. Естественное простейшее обобщение - классическая конфигурация с несколькими входящими/выходящими импульсами $\sum_j P_j^\mu = 0$, отвечающая гипотетически рассеянию нескольких волно-частично подобных конфигураций. Вычисление действие сводится к решению простой линейной задачи для оператора Лапласа на мировом листе.

- Найденное выражение для классического действия содержит плохо определенный кусок “самодействия”, который может быть доопределен лишь в квантовой задаче. Кроме того, экспонента от классического действия явно “недоинтегрирована” - зависит от координат на мировом листе. Попытка ее доинтегрировать и условие независимости от выбора координат на мировом листе сразу накладывает дополнительные условия на параметры задачи, в частности импульсы должны подчиняться условию массовой поверхности тахионов $P^\mu P_\mu = \frac{1}{\alpha'}$ для открытой струны и $P^\mu P_\mu = \frac{4}{\alpha'}$ - для замкнутой.

- Вычисление интеграла в простейшем случае 4-точечной амплитуды Венециано даёт выражение, которое можно разложить по “резонансам” масс $M^2 = \frac{n}{\alpha'}$, начиная с тахиона, безмассового состояния и.т.д. $n = 0 = -1, 0, 1, 2, \ldots$. Это наводит на мысль о том, что в квантовом спектре возбуждений струны должны встречаться состояния с любыми, сколь угодно большими, массами. Ответ на этот вопрос должно дать каноническое квантование струны.