ПУЧКИ И ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

ЛИСТОК 3: ПРЯМЫЕ-ОБРАТНЫЕ ОБРАЗЫ И ТОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Осень 2013 года

Задача 1. Пусть $f\colon X \longrightarrow Y$ — непрерывное отображение топологических пространств.

а) Покажите, что если $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$ — точная последовательность пучков на Y, то последовательность $0 \longrightarrow f^*\mathcal{F} \longrightarrow f^*\mathcal{G} \longrightarrow f^*\mathcal{H} \longrightarrow 0$ пучков на X точна.

б) Покажите, что если $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$ — точная последовательность пучков на X, то последовательность $0 \longrightarrow f_*\mathcal{F} \longrightarrow f_*\mathcal{G} \longrightarrow f_*\mathcal{H}$ пучков на Y точна.

в) Приведите контрпример, показывающий, что последовательность из пункта б) (продолженная нулевым пучком) может не быть точной в правом члене.

Задача 2. Пусть X — топологическое пространство, $U \subset X$ — его открытое подмножество, снабженное индуцированной топологией, и $j\colon U \longrightarrow X$ — отображение вложения. Пусть $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$ — точная последовательность пучков на U.

а) Покажите, что последовательность $0 \longrightarrow j_!\mathcal{F} \longrightarrow j_!\mathcal{G} \longrightarrow j_!\mathcal{H} \longrightarrow 0$ пучков на X точна.

б) Покажите, что последовательность $0 \longrightarrow j_*\mathcal{F} \longrightarrow j_*\mathcal{G} \longrightarrow j_*\mathcal{H}$ пучков на X точна.

в) Приведите контрпример, показывающий, что последовательность из пункта б) (продолженная нулевым пучком) может не быть точной в правом члене.

Задача 3. Пусть X — топологическое пространство, $Z \subset X$ — его замкнутое подмножество, снабженное индуцированной топологией, и $i\colon Z \longrightarrow X$ — отображение вложения.

а) Покажите, что если $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$ — точная последовательность пучков на Z, то последовательность $0 \longrightarrow i_*\mathcal{F} \longrightarrow i_*\mathcal{G} \longrightarrow i_*\mathcal{H} \longrightarrow 0$ пучков на X точна.

б) Покажите, что если $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$ — точная последовательность пучков на X, то последовательность $0 \longrightarrow i^!\mathcal{F} \longrightarrow i^!\mathcal{G} \longrightarrow i^!\mathcal{H}$ пучков на Z точна.

в) Приведите контрпример, показывающий, что последовательность из пункта б) (продолженная нулевым пучком) может не быть точной в правом члене.

Задача 4. Пусть X — топологическое пространство, $Z \subset X$ — его замкнутое подмножество, и $U = X \setminus Z$ — его открытое дополнение. Снабдим Z и U индуцированными топологиями, и обозначим через $i\colon Z \longrightarrow X$ и $j\colon U \longrightarrow X$ естественные вложения. Пусть $\mathcal{F}$ — произвольный пучок на X.

а) Постройте точную последовательность пучков на X

$$0 \longrightarrow j_! j^* \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow i_* i^* \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

б) Постройте точную последовательность пучков на X

$$0 \longrightarrow i_* i^! \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow j_* j^* \mathcal{F}.$$

в) Приведите контрпример, показывающий, что последовательность из пункта б) (продолженная нулевым пучком) может не быть точной в правом члене.

Задача 5. Для каждого из следующих открытых вложений $j\colon U \longrightarrow X$ нужно 1) вычислить слои прямого образа постоянного пучка $j_*\underline{\mathbb{Z}}$ во всех точках $x \in X$; и 2) описать пучок $j_*\underline{\mathbb{Z}}$ на X, выразив его через операции

- прямого образа i_* при замкнутых вложениях i и

- продолжения нулем $k_!$ при открытых вложениях k каких-то топологических пространств,

- примененные к постоянному пучку $\underline{\mathbb{Z}}$,

- а также операцию перехода от двух крайних членов короткой точной последовательности к среднему:

а) $X = \mathbb{R}$ — прямая, $U = \,]0,1[$ — интервал;

б) $X = \mathbb{R}$ — прямая, $U = \,]0,1[\, \cup \,]1,2[$ — объединение двух интервалов с общим концом;

в) $X = \mathbb{R}^2$ — плоскость, $U = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ — внутренность круга;

г) $X = \mathbb{R}^2$ — плоскость, $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ — дополнение к точке;

д) $X = \mathbb{R}^2$ — плоскость, $U = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}$ — дополнение к прямой;

е) $X = \mathbb{R}^2$ — плоскость, $U = \mathbb{R}^2_+ \cup \mathbb{R}^2_- \cup \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$ — объединение внутренностей первого и третьего квадрантов, и внешности круга;

ж) $X = \mathbb{R}^2$ — плоскость, $U = ((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}_+) \cup \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$ — объединение внутренностей первого и второго квадрантов, и внешности круга;

з) $X = \mathbb{R}^2$ — плоскость, $U = (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 \cup \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$ — дополнение к двум пересекающимся прямым, объединенное с внешностью круга;

и) $X = \mathbb{R}^3$ — трехмерное пространство, $U = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \neq z^2\}$ — дополнение к квадратичному конусу.