Шпаргалка по представлениям конечных групп

0. *Представление* группы G — это векторное пространство V вместе с гомоморфизмом $G \to GL(V)$ ("действие группы на векторном пространстве линейными преобразованиями"). Представление группы G над полем k — то же самое, что $k[G]$-модуль.

Далее группа будет конечной, векторное пространство конечномерным. Основное поле (если не уточнено другое) будет алгебраически замкнутым характеристики ноль.

1. Неприводимые представления. Представление называется *неприводимым*, если у него нет нетривиальных подпредставлений.

Неприводимые комплексные представления абелевой группы одномерны. Группа (операция — $\otimes$) $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{C}^\times)$ неприводимых комплексных представлений конечной абелевой группы изоморфна (неканонически) самой этой группе. Одномерные представления группы G являются представлениями группы $G^{ab} := G/[G, G]$.

Теорема Машке: всякое представление конечной группы над полем характеристики ноль разлагается в прямую сумму неприводимых (идея доказательства: взять ортогональное дополнение относительно G-инвариантного скалярного произведения). Следствие (доказательства): всякое комплексное представление конечной группы можно сделать унитарным.

Лемма Шура: между неприводимыми представлениями V и W есть гомоморфизм тогда и только тогда, когда они изоморфны; более того, над алгебраически замкнутым полем k

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} k, & V \cong W; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следствие: над алгебраически замкнутым полем неприводимое представление ρ входит в данное представление V с кратностью $\dim \mathrm{Hom}_G(\rho, V)$; в частности, эта кратность определена однозначно.

2. Характеры. *Характер* представления $\rho \colon G \to V$ — это функция $\chi_\rho \colon G \to k, g \mapsto \mathrm{Tr}\, \rho(g)$. Взятие характера согласовано с операциями: $\chi_{U \oplus V} = \chi_U + \chi_V$, $\chi_{U \otimes V} = \chi_U \cdot \chi_V$.

Любой характер — *центральная функция*, т. е. он постоянен на классах сопряженности. *Скалярное произведение* на центральных функциях:

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \frac{1}{|G|} \sum \alpha(g^{-1}) \beta(g).$$

Соотношение ортогональности: характеры различных неприводимых представлений ортонормальны. *Следствия* (ортогональности и леммы Шура):
(1) $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1 \iff V$ неприводимо;
(2) неприводимое представление ρ входит в V с кратностью $\langle \chi_\rho, \chi_V \rangle$;
(3) представление определяется своим характером.

Как следствие, в *регулярное представление* $k[G]$ неприводимое представление ρ входит с кратностью $\dim \rho$. Отсюда вытекает *формула Бернсайда:* сумма квадратов всех неприводимых представлений группы G равна $|G|$.

Теорема: характеры неприводимых представлений образуют ортонормальный *базис* в пространстве центральных функций. *Следствие:* число неприводимых представлений группы равно количеству ее классов сопряженности.

Литература. Crash course: первая часть приложения Д. Загира к книге *Звонкин, Ландо. Графы на поверхностях...* (стр. 406–413). Учебник: *Фултон, Харрис. Теория представлений...* или *Серр. Линейные представления конечных групп.*