1 Вводная лекция

2 Классическая струна Полякова

3 Основные идеи квантовой теории струн

4 Действие классической струны и квантовые амплитуды

5 Каноническое квантование и струнный спектр

5.1 Формальное квантование бозонной струны

Вспомним свободную струну, распространяющуюся в "мировом времени" $-\infty < \tau < \infty$, а параметр $0 \leq \sigma \leq l$ пусть ограничен произвольным l. Естественными граничными условиями будут

$$\begin{aligned} X^\mu(\sigma + l, \tau) &= X^\mu(\sigma, \tau), \qquad \text{closed string} \\ \partial_\sigma X^\mu(\sigma, \tau)|_{\sigma=0,l} &= 0, \qquad \text{open string} \end{aligned} \tag{5.1}$$

в случае открытой струны - простейшие граничные условия, отвечающие свободному движению в D-мерном пространстве Минковского. Можно сделать преобразование Фурье по направлению σ

- $X^\mu(\sigma + l, \tau) = X^\mu(\sigma, \tau)$, замкнутая струна, в разложении Фурье $X^\mu(\sigma, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{2\pi i n \sigma}{l}\right) X^\mu_n(\tau)$, $\bar{X}^\mu_n = X^\mu_{-n}$;
- $\partial_\sigma X^\mu|_{\sigma=0,l} = 0$, открытая струна, в разложении Фурье $X^\mu(\sigma, \tau) = X^\mu_0(\tau) + \sqrt{2} \sum_{n>0} \cos\left(\frac{\pi n \sigma}{l}\right) X^\mu_n(\tau)$.

В случае открытой струны - бесконечный набор релятивистских волн-частиц, в случае замкнутой - "дважды бесконечный" набор. Подстановка

в действие приводит к системе бесконечных осцилляторов

$$S = \frac{T}{2}\int d\tau d\sigma \left(\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu - X'^\mu X'_\mu\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{Tl}{2}\displaystyle\int d\tau \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\dot{X}_{\mu,n}\dot{X}^\mu_{-n} - \frac{4\pi^2 n^2}{l^2} X_{\mu,n}X^\mu_{-n}\right), & \text{closed string} \\ \dfrac{Tl}{2}\displaystyle\int d\tau \left(\dot{X}_{\mu,0}\dot{X}^\mu_0 + \sum_{n>0}\left(\dot{X}_{\mu,n}\dot{X}^\mu_n - \frac{\pi^2 n^2}{l^2} X_{\mu,n}X^\mu_n\right)\right), & \text{open string} \end{cases} \tag{5.2}$$

Вспомним, что классические решения для замкнутой струны имеют вид

$$\begin{gathered} X^\mu_n(\tau) \underset{l=\pi}{=} -\frac{i\sqrt{\alpha'}}{n}\left(\alpha^\mu_n e^{-2in\tau} - \tilde{\alpha}^\mu_{-n} e^{2in\tau}\right), \quad n \neq 0 \\ \bar{\alpha}^\mu_n = \alpha^\mu_{-n}, \quad \bar{\tilde{\alpha}}^\mu_n = \tilde{\alpha}^\mu_{-n} \\ X^\mu_0(\tau) = x^\mu + p^\mu\tau = x^\mu + \frac{P^\mu}{lT}\tau \underset{T=1/2\pi\alpha',\ l=\pi}{=} x^\mu + 2\alpha' P^\mu \tau \end{gathered} \tag{5.3}$$

а для открытой

$$\begin{gathered} X^\mu_n(\tau) \underset{l=\pi}{=} \frac{i\sqrt{\alpha'}}{n}\left(\alpha^\mu_n e^{-in\tau} - \alpha^\mu_{-n} e^{in\tau}\right), \quad n > 0, \quad \bar{\alpha}^\mu_n = \alpha^\mu_{-n} \\ X^\mu_0(\tau) = x^\mu + p^\mu\tau = x^\mu + \frac{P^\mu}{lT}\tau \underset{T=1/2\pi\alpha',\ l=\pi}{=} x^\mu + 2\alpha' P^\mu \tau \end{gathered} \tag{5.4}$$

Каждое слагаемое для открытой струны - действие набора гармонических осцилляторов вида

$$S_n \underset{\alpha'=1/2,\ l=\pi}{=} \tfrac{1}{2}\int d\tau \left(\dot{X}^2_n - n^2 X^2_n\right) \tag{5.5}$$

с частотами $\omega_n = n$. В гамильтоновом формализме

$$P_n = \dot{X}_n, \quad H_n = \tfrac{1}{2}\left(P^2_n + n^2 X^2_n\right) \tag{5.6}$$

формальное каноническое квантование этих осцилляторов задается соотношениями:

$$[\hat{X}_n, \hat{P}_m] = i\delta_{nm} \tag{5.7}$$

или, вспомнив, что координат-полей у нас много

$$[\hat{X}^\mu_n, \hat{P}_{m,\nu}] = i\delta_{nm}\delta^\mu_\nu \tag{5.8}$$

Переходя к голоморфному представлению

$$\begin{aligned}\hat{H}_n = \tfrac{1}{2}\left(\hat{P}_n^2 + n^2\hat{X}_n^2\right) = \tfrac{1}{2}\left(\hat{P}_n + in\hat{X}_n\right)\left(\hat{P}_n - in\hat{X}_n\right) + \frac{n}{2} = \\ = \hat{\alpha}_{-n}\hat{\alpha}_n + \frac{n}{2}\end{aligned} \tag{5.9}$$

или

$$\hat{X}^\mu_n = -\frac{i}{\sqrt{2}n}\left(\hat{\alpha}^\mu_n - \hat{\alpha}^\mu_{-n}\right), \quad \hat{P}^\mu_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\alpha}^\mu_n + \hat{\alpha}^\mu_{-n}\right), \quad n > 0 \tag{5.10}$$

где операторы голоморфного представления удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{\alpha}^\mu_n, \hat{\alpha}^\nu_m] = n\delta_{n+m,0}\eta^{\mu\nu} \tag{5.11}$$

Мы видим, что формальное квантование сводится к замене амплитуд плоских волн в классическом решении на операторы рождения и уничтожения бесконечной системы гармонических осцилляторов.

Для замкнутой струны разложение по осцилляторам можно представить в виде

$$\begin{aligned}\frac{Tl}{2}\int d\tau \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\dot{X}_{\mu,n}\dot{X}^\mu_{-n} - \frac{4\pi^2 n^2}{l^2}X_{\mu,n}X^\mu_{-n}\right) \underset{T=1/\pi,\ l=\pi}{=} \\ = \tfrac{1}{2}\int d\tau \dot{X}_{\mu,0}\dot{X}^\mu_0 + \sum_{n>0}\int d\tau\left(\dot{X}_{\mu,n}\dot{\bar{X}}^\mu_n - 4n^2 X_{\mu,n}\bar{X}^\mu_n\right)\end{aligned} \tag{5.12}$$

Таким образом для каждой положительной гармоники $n > 0$ мы получаем действие пары гармонических осцилляторов

$$\begin{aligned}\int d\tau\left(\dot{X}_n\dot{\bar{X}}_n - 4n^2 X_n\bar{X}_n\right) = \\ = \tfrac{1}{2}\int d\tau\left(\dot{Y}_n^2 - 4n^2 Y_n^2\right) + \tfrac{1}{2}\int d\tau\left(\dot{\tilde{Y}}_n^2 - 4n^2\tilde{Y}_n^2\right)\end{aligned} \tag{5.13}$$

с удвоенными частотами, по сравнению со случаем открытой струны.

Легко проверить, что Гамильтониан такой системы в голоморфном представлении имеет вид

$$\hat{H}_n = \hat{\alpha}_{-n}\hat{\alpha}_n + \hat{\tilde{\alpha}}_{-n}\hat{\tilde{\alpha}}_n + n \tag{5.14}$$

где обе пары операторов рождения и уничтожения коммутируют

$$[\hat{\alpha}^\mu_n, \hat{\alpha}^\nu_m] = n\delta_{n+m,0}\eta^{\mu\nu}, \qquad [\hat{\tilde{\alpha}}^\mu_n, \hat{\tilde{\alpha}}^\nu_m] = n\delta_{n+m,0}\eta^{\mu\nu} \tag{5.15}$$

стандартным образом (с точностью до нормировки), и являются линейными комбинациями осцилляторов

$$\begin{aligned} \hat{Y}_n &= -\frac{i}{\sqrt{2}n}\left(\hat{\beta}_n - \hat{\beta}_{-n}\right), \quad \hat{P}_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\beta}_n + \hat{\beta}_{-n}\right), \quad n > 0 \\ \hat{\tilde{Y}}_n &= -\frac{i}{\sqrt{2}n}\left(\hat{\tilde{\beta}}_n - \hat{\tilde{\beta}}_{-n}\right), \quad \hat{\tilde{P}}_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\tilde{\beta}}_n + \hat{\tilde{\beta}}_{-n}\right), \quad n > 0 \end{aligned} \tag{5.16}$$

для двух вещественных скалярных полей в (5.13). Именно,

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta_n + i\tilde{\beta}_n\right), \qquad \alpha_{-n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta_{-n} - i\tilde{\beta}_{-n}\right) \\ \tilde{\alpha}_n &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta_n - i\tilde{\beta}_n\right), \qquad \tilde{\alpha}_{-n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta_{-n} + i\tilde{\beta}_{-n}\right) \end{aligned} \tag{5.17}$$

где везде $n > 0$. Что касается нулевой моды $X^\mu_0(\tau)$, вещественной в обоих случаях (открытой и замкнутой струны), то она отвечает движению свободной частицы (“центра масс струны”). Для единообразия часто вводят переменную

$$\alpha^\mu_0 = \tilde{\alpha}^\mu_0 = \frac{P^\mu}{\sqrt{2}} \tag{5.18}$$

являющуюся (в классической теории) импульсом центра масс. В квантовой теории после этого различают “вакуумные” (с точки зрения гармонического осциллятора) состояния с фиксированным импульсом

$$\hat{\alpha}^\mu_0|0;k\rangle = \hat{\tilde{\alpha}}^\mu_0|0;k\rangle = \frac{k^\mu}{\sqrt{2}}|0;k\rangle \tag{5.19}$$

что является банальной переформулировкой классического утверждения в силу коммутативности $\hat{\alpha}^\mu_0$ и $\hat{\tilde{\alpha}}^\mu_0$ с остальными операторами рождения

и уничтожения, где “вакуум” (с точки зрения отсутствия возбуждения струнных гармоник) удовлетворяет условиям

$$\hat{\alpha}^{\mu}_{n}|0;k\rangle = \hat{\tilde{\alpha}}^{\mu}_{m}|0 = 0, \qquad \forall\ n, m > 0 \tag{5.20}$$

а возбужденные состояния струны имеют вид (для открытой струны, которую будем обсуждать далее в этой лекции)

$$\hat{\alpha}^{\mu_1}_{-n_1} \dots \hat{\alpha}^{\mu_m}_{-n_m}|0;k\rangle \tag{5.21}$$

С точки зрения формального квантования мы построили пространство состояний бозонной струны.

5.2 Квантование и связи

Что в проделанном рассуждении неправильно?

- Квантование системы проведено формально - не выявлены физические переменные, никак не учтена (и не зафиксирована репараметризационная инвариантность).

- Мы совершенно забыли про связи - уравнения $T_{\alpha\beta} = 0$. Классически (для открытой струны, в евклидовом пространстве - что в данном случае не важно) они имеют вид

$$T = -\tfrac{1}{2}\partial X^{\mu}\partial X_{\mu} = 0, \qquad \partial X^{\mu} = -i\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha^{\mu}_{n}}{z^{n+1}} \tag{5.22}$$

  т.е.

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{L_n}{z^{n+2}} = 0, \qquad L_n = \tfrac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha^{\mu}_{n-k}\alpha_{k,\mu} = 0 \tag{5.23}$$

  Которые часто называются условиями Вирасоро. Заметим, что $L_0 = \sum_{n\geq 0} H_n$, похоже просто на сумму формальных гамильтонианов (5.6) взятую, в том числе по всем пространственно-временным компонентам.

- Легко убедиться, что такое квантование противоречиво, например посмотрев на норму простейшего вектора $\alpha^\mu_{-1}|0\rangle$ (фоковский вакуума $|0,k\rangle$ при любом k). Действительно,

$$\langle 0|\alpha^\mu_1\alpha^\nu_{-1}|0\rangle = \eta^{\mu\nu} \tag{5.24}$$

  и если $\|\alpha^i_{-1}|0\rangle\|^2 > 0$, то $\|\alpha^0_{-1}|0\rangle\|^2 < 0$ (индефинитная метрика).

Чтобы квантовать систему неформально следует учесть связи. Первый способ - если возможно - разрешить их классически, и квантовать в независимых физических переменных. Второй способ - воспользоваться формальным квантованием, но научиться налагать связи в квантовой теории.

5.3 Физические переменные и спектр

Стандартный способ разрешения связей в классической теории струн - выбор калибровки светового конуса. Перейдем к конусным координатам $x^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^0 \pm x^{D-1}\right)$ в пространстве-времени Минковского, в которых метрика принимает вид

$$\eta_{\mu\nu}A^\mu B^\nu = \sum_{i=1}^{D-2} A^i B^i - A^+B^- - A^-B^+ \tag{5.25}$$

Заметим, что для любого вектора $A_i = A^i$, но $A_\pm = -A^\mp$. Калибровка светового конуса означает, что выбором параметризации на мировом листе можно добиться того, что

$$X^+(\tau,\sigma) = x^+ + P^+\tau \tag{5.26}$$

В этой калибровке условия Вирасоро (5.23) принимают вид

$$0 = L_n = \tfrac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha^i_{n-k}\alpha^i_k - P^+\alpha^-_n \tag{5.27}$$

то есть независимыми переменными остаются α^i_n, $i = 1,\ldots,D-2$, а конусные компоненты выражаются через них как $\alpha^+_n = \frac{P^+}{2}\delta_{n0}$ и

$$\alpha^-_n = \frac{1}{2P^+}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha^i_{n-k}\alpha^i_k \tag{5.28}$$

Посмотрим теперь повнимательнее на условие $L_0 = 0$

$$\begin{aligned} 0 = L_0 = \tfrac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^i_{-n}\alpha^i_n - P^+P^- = \\ = \sum_{n>0} \alpha^i_{-n}\alpha^i_n + \tfrac{1}{2}P^iP^i - P^+P^- \end{aligned} \tag{5.29}$$

Его можно переписать в виде

$$P^- = \frac{P^iP^i + 2\sum_{n>0}\alpha^i_{-n}\alpha^i_n}{2P^+} \tag{5.30}$$

что имеет очевидную интерпретацию: в калибровке светового конуса гамильтонианом частицы является компонента P^-, связанная с другими компонентами импульса соотношением

$$P^- = \frac{P^iP^i + M^2}{2P^+} \tag{5.31}$$

про которое говорят как про условие *массовой поверхности*. Таким образом, чтобы узнать массу струнных возбуждений нужно "проквантовать" массовый оператор

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}\sum_{n>0}\alpha^i_{-n}\alpha^i_n \tag{5.32}$$

представляющий из себя сумму гамильтонианов поперечных физических осцилляторов. Ответ очевиден: массовый спектр состояний открытой бозонной струны определяется собственными значениями оператора

$$\hat{M}^2 = \frac{1}{\alpha'}\left(\sum_{n>0}\hat{\alpha}^i_{-n}\hat{\alpha}^i_n + \frac{D-2}{2}\sum_{n>0} n\right) \tag{5.33}$$

где "космологическая постоянная"

$$\sum_{n>0} n = -\frac{1}{12} \tag{5.34}$$

может быть скорее обоснована физическими соображениями, чем реально вычислена.

5.4 Критическая размерность, тахион и аномалия

Формулу (5.34) можно “доказывать” по-разному

- Дзета-функция

$$\sum_{n>0} n = \sum_{n>0} n^{-s}\Big|_{s=-1} = \zeta(s)\big|_{s\to-1} = -\frac{1}{12} \tag{5.35}$$

  дает ровно это значение в смысле аналитического продолжения.

- Другая регуляризация

$$\begin{aligned}\sum_{n>0} n = \sum_{n>0} n e^{-\epsilon n}\Big|_{\epsilon\to 0} &= -\frac{\partial}{\partial\epsilon}\sum_{n>0} e^{-\epsilon n}\Big|_{\epsilon\to 0} = \\ = -\frac{\partial}{\partial\epsilon}\frac{1}{e^{\epsilon}-1}\Big|_{\epsilon\to 0} &\underset{\epsilon\to 0}{=} \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{12} + O(\epsilon^2)\end{aligned} \tag{5.36}$$

  дает тот же самый результат если выкинуть сингулярный член.

В реальности эти регуляризации относятся к классу разумных, которые дают ответ согласованный с другими *физическими* критериями. Получим при этом массовый оператор:

$$\hat{M}^2 = \frac{1}{\alpha'}\left(\sum_{n>0}\hat{\alpha}^i_{-n}\hat{\alpha}^i_n - \frac{D-2}{24}\right) \tag{5.37}$$

и для низших возбуждений бозонной струны

$$\begin{aligned}\alpha'\hat{M}^2|0,k\rangle &= -\frac{D-2}{24}|0,k\rangle \\ \alpha'\hat{M}^2\alpha^i_{-1}|0,k\rangle &= \left(1-\frac{D-2}{24}\right)\alpha^i_{-1}|0,k\rangle \\ \alpha'\hat{M}^2\alpha^{i_1}_{-k_1}\ldots\alpha^{i_m}_{-k_m}|0,k\rangle &= \left(\sum_{j=1}^m k_j - \frac{D-2}{24}\right)\alpha^{i_1}_{-k_1}\ldots\alpha^{i_m}_{-k_m}|0,k\rangle\end{aligned} \tag{5.38}$$

Состояние α^i_{-1} является поперечным вектором в D-мерном пространстве времени, такой вектор должен быть безмассовым в силу калибровочной

инвариантности. Это физическое требование однозначно фиксирует его массу $1 - \frac{D-2}{24} = 0$, или критическую размерность

$$D = 26 \tag{5.39}$$

Отсюда следует, что вакуумное состояние должно быть тахионом с массой

$$-\frac{D-2}{24\alpha'} \underset{D=26}{=} -\frac{1}{\alpha'} \tag{5.40}$$

что буквально совпадает со значением масс внешних "невозбужденных" концов, которое следует из проективной инвариантности интеграла для амплитуды Венециано. Наконец, массы "тяжелых" струнных состояний также описываются общей формулой $\alpha' M^2 = n$, где $n \geq -1$, что опять же совпадает с выводами относительно масс промежуточных резонансов, которые возникают при анализе формулы Венециано. Таким образом, осциляторное квантование струны при выборе разумной регуляризации приводит к ожидаемым физическим результатам для спектра струны, но только в критической размерности $D = 26$!

Нетривиальная проверка этого значения заключается в проверке соотношений алгебра Пуанкаре в пространстве-времени после того, как мы перешли к физическим переменным. В терминах D свободных полей вычисление коммутаторов генераторов

$$J^{\mu\nu} = T \int d\sigma \left(\dot{X}^\mu X^\nu - X^\mu \dot{X}^\nu \right) \tag{5.41}$$

выраженных через осцилляторы α_n^μ представляет собой достаточно простое упражнение. Утверждение ГГРТ состоит в том, что коммутатор в алгебре Лоренца

$$[J^{i-}, J^{j-}] = 0 \tag{5.42}$$

кубических по физическим осцилляторам генераторов в действительности равен нулю лишь при $D = 26$. Это явление иногда называют аномалией в алгебре Лоренца или Пуанкаре.