

Математические основы естествознания. Теория струн

Контрольная работа, 1 модуль

- Найти действие $S(q_0, q_1; t)$ частицы с функцией лагранжа $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m\dot{q}^2$ при движении по классической траектории от $q(0) = q_0$ до $q(t) = q_1$. Напишите уравнение Гамильтона-Якоби, которому удовлетворяет ответ.
- Найти спектр энергий гармонического осциллятора с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{P}^2 + \omega^2 \hat{Q}^2)$$

где $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$.

- Вычислить след тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}}$ для классического евклидова действия Полякова ($\alpha, \beta = 1, 2; \mu = 1, \dots, D$)

$$S[X, g] = \frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu$$

где $g = \det_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$.

- Решить уравнение Лапласа $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \Phi(x, y) = 0$ в верхней полуплоскости $y \geq 0$ с граничным условием $\Phi(x, 0) = f(x)$.

- Найти массы (собственные значения массового оператора)

$$\alpha' \hat{M}^2 = \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n>0} \left(\hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i + \hat{\tilde{\alpha}}_{-n}^i \hat{\tilde{\alpha}}_n^i \right) - \frac{D-2}{12}$$

следующих состояний замкнутой бозонной струны ($[\hat{\alpha}_n^i, \hat{\alpha}_m^j] = n\delta_{n+m,0}\delta^{ij}$, $[\hat{\tilde{\alpha}}_n^i, \hat{\tilde{\alpha}}_m^j] = n\delta_{n+m,0}\delta^{ij}$)

$$|0, k\rangle, \quad \hat{\alpha}_{-1}^i \hat{\tilde{\alpha}}_{-1}^j |0, k\rangle, \quad \hat{\alpha}_{-1}^i \hat{\alpha}_{-2}^k \hat{\tilde{\alpha}}_{-3}^j |0, k\rangle$$

Считая второе из них с безмассовым (после симметризации по i, j - гравитоном), найти критическую размерность замкнутой бозонной струны.

- Для метрики Фубини-Штуди на двумерной сфере $ds^2 = 4 \frac{dzd\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}$ найти скалярную кривизну R и характеристику Эйлера $2\pi\chi = \int d^2z \sqrt{g}R$.

- Вычислить 4-точечную амплитуду Шапиро-Вирацоро ($P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0$)

$$A(P_1, \dots, P_4) = \int_{\mathbb{C}} d^2z |z|^{\alpha' P_1 \cdot P_2} |1-z|^{\alpha' P_2 \cdot P_3}$$

и проанализировать спектр замкнутой струны.

- Найти производящую функцию для числа физических состояний $d(n)$ открытой бозонной струны с массами $\alpha' M^2 = n$. Существует ли температура, при которой статсумма такой системы не может быть определена? Если да, оценить её с помощью асимптотики $d(n)$ при больших n .