Факультет математики НИУ ВШЭ
Письменный вступительный экзамен в аспирантуру

16 октября 2013 г.

(продолжительность экзамена 5 часов)

1. (а) Пусть p — простое число, а A — целочисленная $n \times n$-матрица такая, что

$$A^p = I,$$

где I — единичная матрица, но при этом $A \neq I$. Докажите, что $n \geq p - 1$.

(б) Приведите пример такой матрицы для $n = p - 1$.

2. Существует ли в вещественном трехмерном евклидовом пространстве компактная минимальная поверхность? (Гладкая поверхность называется *минимальной*, если на ней функционал площади достигает локального минимума.)

3. Пусть A — вещественная $d \times n$-матрица, а $b \in \mathbb{R}^d$ — вектор-столбец. Через $x \in \mathbb{R}^n$ обозначается вектор-столбец, а через $y \in \mathbb{R}^d$ — вектор-строка. Докажите, что справедливо одно и только одно из следующих утверждений:

1) существует решение задачи $Ax = b$, такое что $x \geq 0$ (то есть все координаты вектора x неотрицательны);

2) существует решение задачи $yA \leq 0$, такое что $yb > 0$.

4. Пусть $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0,\ y = x^3\}$. Найдите $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus X)$.

5. (а) В некоторой конечной группе можно выбрать по представителю в каждом классе сопряжённости так, что все они будут коммутировать. Докажите, что эта группа коммутативна.

(б) Приведите пример бесконечной группы, в которой это неверно.

6. На единичной окружности дано n точек. Докажите, что можно выбрать такую точку на этой же окружности, что произведение расстояний от неё до заданных точек не меньше единицы.

7. Пусть x_n — наименьший положительный корень уравнения

$$x^5 + 1 = nx$$

(где $n > 2$ целое). Найдите первые три члена асимптотики x_n при $n \to \infty$.