Представления симметрических групп II

4. Действие образующих на базисе Гельфанда–Цетлина. Как обсуждалось на прошлой лекции, каждое неприводимое представление группы S_n обладает базисом (“Гельфанда–Цетлина”) из общих собственных векторов элементов Юнга–Юциса–Мёрфи

$$X_i := (1\ i) + (2\ i) + \ldots + (i-1\ i).$$

(Можно сказать, что коммутативная алгебра, ими порожденная, играет роль, до некоторой степени аналогичную максимальному тору группы Ли.)

Обозначим через v_α элемент базиса Гельфанда–Цетлина, на котором X_i действует с собственным значением α_i. Как могут действовать образующие $(i-1\ i) =: s_{i-1}$? Элементы X_{i-1}, X_i и s_{i-1} удовлетворяют соотношениям (вырожденной аффинной) *алгебры Гекке*

$$H(2) := \mathbb{C}\{X, X', s\}/\langle XX' = X'X,\ s^2 = 1,\ sX - X's = 1\rangle.$$

В задаче 1 последнего домашнего задания предлогалось описать представления этой алгебры. Сделав это, нетрудно увидеть (указание: начните с базиса v, sv и диагонализуйте операторы X и X'), что

$$s_{i-1}v_\alpha = \begin{cases} \pm v_\alpha, & \text{если } \alpha_i = \alpha_{i-1} \pm 1; \\ v_{s_{i-1}\alpha} + \frac{1}{\alpha_i - \alpha_{i-1}} v_\alpha, & \text{иначе.} \end{cases} \qquad (*)$$

5. Вектора содержаний и допустимые перестановки. Из последней формулы видно, что вектор α собственных значений YJM-элементов (“вектор содержаний”) *полностью задает неприводимое представление!* Возникает естественная программа дальнейших действий:

— описать вектора содержаний, происходящие из представлениям группы S_n (а не алгебры $H(n)$, фактором которой является $\mathbb{C}[S_n]$);

— выяснить, какие вектора содержаний эквивалентны (т. е. соответствуют разным элементам базиса одного и того же представления).

Как мы вскоре увидим, все вектора содержаний целочисленны. Из формулы (*) видно, что эквивалентные вектора получаются друг из друга перестановками — но *допустимы* не все перестановки: соседние элементы разрешается переставлять только если они отличаются более чем на единицу.

Пример: для векторов содержаний $(0, 1, \ldots, n-1)$ и $(0, -1, \ldots, -n+1)$ допустимые перестановки отсутствуют (т. е. соответствующие представления одномерны), а все коксprogramтеровские образующие действуют умножением на $+1$ и -1 соответственно (т. е. это соответственно тривиальное и знаковое представления). *Еще пример:* $(0, 1, -1) \sim (0, -1, 1)$.

6. Вектора содержаний и таблицу Юнга. Сопоставим вектору содержаний диаграмму следующим образом. Будем сбрасывать в угол, образованный лучами $(1, 1)$ и $(-1, 1)$, клетки: сначала квадратик с меткой 1 из точки $(\alpha_1, +\infty)$, потом квадратик с меткой 2 из точки $(\alpha_2, +\infty)$ и т. д. (клетки падают вертикально вниз пока могут, но не «съезжают» по горизонтали; см. рис.).

Такое определение имеет хотя бы то достоинство, что допустимые перестановки сохраняют, очевидно, форму диаграммы. Наша **цель** — доказать, что допустимые диаграммы суть таблицы Юнга, а все таблицы данной формы отличаются на допустимую перестановку.

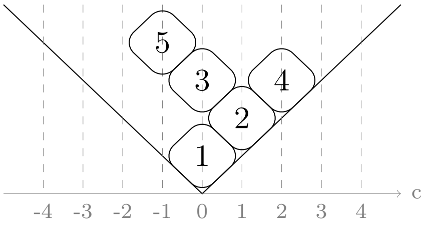

Рис. 1: Диаграмма для $\alpha = (0, 1, 0, 2, -1)$.

Как убедиться, что допустимая диаграмма является таблицей Юнга? Достаточно доказать всего 3 вещи:

— содержания всех клеток целочисленны;

— до клетки с содержанием $n > 0$ есть клетка с содержанием $n - 1$ ($n + 1$ при $n < 0$);

— между двумя клетками с содержанием n есть клетки с содержаниями $n \pm 1$.

(Достаточно, отметим, чтобы фигура имела правильную форму, условие стандартности таблицы выполняется тогда автоматически.)

Первые два условия выполнены, так как в противном случае допустимыми перестановками можно сделать первую координату вектора содержаний ненулевой (а $X_1 = 0$ действует, конечно, с нулевым собственным значением).

Перейдем к третьему условию. Фрагмент вида $n, n \pm 1, n$ не может входить в вектор содержаний, так как на таком векторе не выполнены соотношения Кокстера ($s_i s_{i+1} s_i$ и $s_{i+1} s_i s_{i+1}$ действуют противоположными знаками). Остальные случаи сводятся к этому допустимыми перестановками (указание: возьмем минимальный по включению фрагмент вида $n, \ldots, n$ и начнем сдвигать его края друг к другу...).

Наконец, то, что все стандартные таблицы данной формы получаются друг из друга допустимыми перестановками — несложное упражнение (можно, например, получать все таблицы из таблицы, в которой числа расставлены последовательно по строкам).

7. Теория представлений симметрических групп (recapitulation). Итак, доказано следующее.

— Неприводимые представления симметрической группы S_n нумеруются диаграммами Юнга из n клеток.

— Элементы базиса Гельфанда–Цетлина данного неприводимого представления нумеруются стандартными таблицами данной формы. Элемент X_i действует на векторе базиса с собственным значением, равным содержанию i-й клетки.

(Это описание отлично согласовано с ограничениями на меньшие подгруппы; в частности, хорошо видно правило ветвления: ограничение неприводимого представления S_n на S_{n-1} есть сумма всевозможных “откусываний клетки”.)

— Кокстеровские образующие действуют на базисных элементах по формуле (*).

Чего еще можно было бы желать? Хотелось бы еще описать *характеры* неприводимых представлений. Это будет сделано на одной из следующих лекций.

Строго говоря, желательно было бы еще проверить, что построенное соответствие между неприводимыми представлениями и диаграммами Юнга то же, что возникает в других конструкциях (симметризаторы Юнга, двойственность Шура–Вейля), но этого мы делать не будем.