1 Вводная лекция

2 Классическая струна Полякова

3 Основные идеи квантовой теории струн

4 Действие классической струны и квантовые амплитуды

5 Каноническое квантование и струнный спектр

6 Континуальный интеграл Фейнмана-Полякова

Перейдем, наконец, к наиболее изящному и продуктивному на данный момент определению квантовой теории - в виде суммы по путям или конфигурациям системы. Такая сумма по конфигурациям наиболее очевидным образом включает в себя фейнмановский интеграл по траекториям. Но иногда, а в теории струн почти всегда, к нему приходится добавлять интеграл по "внутренним геометриям" системы, мы это уже видели на примере "классического" вычисления амплитуды Венециано.

6.1 Функциональный интеграл в квантовой механике

Рассмотрим функциональный интеграл в гамильтоновом формализме

$$\sum_{\text{paths}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right) = \int [DpDq] \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[p,q]\right) \tag{6.1}$$

где

$$S[p,q] = \int_0^T dt\,(p\dot{q} - H(p,q)) \tag{6.2}$$

а $\hbar$ - постоянная Планка. Если $S \gg \hbar$ - система называется классической, а интеграл (6.1) можно вычислять методом стационарной фазы. Мы будем рассматривать квантовые системы, когда $S \sim \hbar$, и положим в дальнейшем $\hbar = 1$.

Функциональный интеграл (6.1) можно вычислять с разными граничными условиями, например

$$\int_{q(0)=q_0, q(T)=q_1} [DpDq] \exp\left(iS[p,q]\right) = \langle q_1| \exp(-i\hat{H}T)|q_0\rangle \tag{6.3}$$

фиксируя граничные значения координаты на концах (при произвольных значениях импульсов) получим ядро оператора эволюции в координатном представлении. В случае замкнутых траекторий дополнительное интегрирование даст

$$\begin{aligned}\int_{q(0)=q(T)} [DpDq] \exp\left(iS[p,q]\right) = \int dq \langle q| \exp(-i\hat{H}T)|q\rangle = \\ = \mathrm{Tr}\exp(-i\hat{H}T)\end{aligned} \tag{6.4}$$

след оператора эволюции.

Для квадратичных по импульсу гамильтонианов $H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + U(q)$ интегрирование по импульсам формально можно провести явно

$$\begin{aligned}\int Dp\ \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt\left(p\dot{q} - \frac{p^2}{2m}\right)\right) = \\ = \int Dp\ \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt\left(\frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{1}{2m}\left(p - m\dot{q}\right)^2\right)\right) = \\ = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt\frac{m\dot{q}^2}{2}\right) N(T,m,\hbar,\ldots)\end{aligned} \tag{6.5}$$

поэтому для таких гамильтонианов часто пишут изначально

$$\begin{aligned}\sum_{\text{paths}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right) = \int Dq\ \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[q]\right) \\ S[q] = \int_0^T dt\left(\frac{m\dot{q}^2}{2} - U(q)\right)\end{aligned} \tag{6.6}$$

где мера Dq связана вообще говоря довольно сложным образом с мерой $[DpDq]$ в гамильтоновой формулировке интеграла (6.1).

6.2 Квантовая теория и статфизика

Рассмотрим теорию поля в $D = d+1$ мерном пространстве времени с действием

$$S = \int dtd^dx\mathcal{L}(\phi,\partial\phi) = \int dtd^dx\left(\tfrac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - V(\phi)\right) \tag{6.7}$$

где сумма берется по $\alpha = 0,1,\ldots,d = D-1$. Уравнения движения следуют из принципа наименьшего действия

$$\delta S = 0 \tag{6.8}$$

решения которых определяют классическую теорию.

В квантовом случае не только классические решения дают вклад: наблюдаемые величины выражаются, например, через функции Грина

$$\langle \phi(t_1, x_1) \dots \phi(t_n, x_n) \rangle = \int D\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right) \tag{6.9}$$

При $S \gg \hbar$ в правую часть дают существенный вклад только конфигурации, на которых $\delta S = 0$ - из-за сильно осциллирующей экспоненты - т.е. классические решения.

Совершим теперь переход в действии (6.7) к мнимому времени $t = x^0 = -ix^D$, тогда

$$-iS = S_E = \int d^D x \left(\tfrac{1}{2}\partial_I \phi \partial_I \phi + V(\phi)\right) \tag{6.10}$$

(где уже сумма производится по $I = 1, \dots, D$), и

$$\int D\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right) = \int D\phi \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S_E\right) \tag{6.11}$$

и функциональный интеграл становится очень похож на статсумму стационарной полевой теории в $D = d + 1$ пространственных измерениях, при температуре равной постоянной Планка. Действие в $d + 1$-мерном пространстве времени превращается в (положительно определенную в "хорошем потенциале" энергию), а классический предел отвечает низкотемпературной фазе, когда система "сваливается" в основное состояние. Величину (6.11) часто называют статсуммой и в контексте квантовой теории. В теории струн мы будем использовать этот переход в простейшем случаях $D = 1$ и $D = 2$.

6.3 Гауссовы интегралы

- Начнем с интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \tag{6.12}$$

  Указание: вычислить квадрат интеграла $I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} dx dy e^{-(x^2+y^2)}$.

- С помощью замены переменной вычисляем

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \tag{6.13}$$

- Тривиально многомерное обобщение

$$I(a_1, \dots, a_n) = \int_{\mathbb{R}^n} dx_1 \dots dx_n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i x_i^2} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\prod_{i=1}^n a_i} \tag{6.14}$$

с помощью которого легко понять формулу

$$I(A) = \int_{\mathbb{R}^n} dx_1 \dots dx_n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}x_ix_j} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \tag{6.15}$$

В последнем случае существенно, что матрицу A можно считать симметричной $A_{ij} = A_{ji}$, и диагонализовать ортогональным преобразованием [1].

Вычислим теперь

$$I(a|b) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2+bx} = e^{b^2/2a}\sqrt{\frac{2\pi}{a}} \tag{6.16}$$

и его очевидное обобщение

$$\begin{aligned} I(A|\mathbf{b}) &= \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\ e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}x_ix_j+\sum_i b_ix_i} = \\ &= e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} b_iA^{-1}_{ij}b_j}\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \end{aligned} \tag{6.17}$$

Замечания:

1. Пусть квадратичное "действие" $S(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}x_ix_j - \sum_i b_ix_i$. Найдем условие его экстремума

$$\frac{\partial S}{\partial x_k} = \sum_j A_{kj}x_j - b_k = 0, \qquad k = 1, \dots, n \tag{6.18}$$

с решением $X_i = \sum_j A^{-1}_{ij}b_j$. На решении $S(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} b_iA^{-1}_{ij}b_j$, т.е.

$$\frac{I(A|\mathbf{b})}{I(A|0)} = \exp(-\ S(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}}) \tag{6.19}$$

где правая часть определяется минимальным значением действия - основным вкладом в интеграл.

2. Легко определить (и вычислить!) "корреляторы"

$$\begin{aligned} \langle x_{i_1}\dots x_{i_k}\rangle &= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\ x_{i_1}\dots x_{i_k}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}x_ix_j}}{\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\ e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}x_ix_j}} = \\ &= \frac{\partial^k}{\partial b_{i_1}\dots\partial b_{i_k}}\frac{I(A|\mathbf{b})}{I(A|0)}\bigg|_{\mathbf{b}=0} = \frac{\partial^k}{\partial b_{i_1}\dots\partial b_{i_k}}\ e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} b_iA^{-1}_{ij}b_j}\bigg|_{\mathbf{b}=0} \end{aligned} \tag{6.20}$$

Из правой части (6.20) видно, что любые корреляторы в гауссовой модели выражаются через парные: теорема Вика.

[1] А что делать если $a_j < 0$ или $a_j = 0$?

6.4 Интеграл по путям для релятивистской частицы

Интеграл по путям в релятивистской евклидовой квантовой механике естественно формально записать как

$$\int DeDX\ e^{-\int_0^1 dt\left(\frac{\dot{X}^2}{2e}+\frac{1}{2}em^2\right)} = \int De\ e^{-\frac{m^2}{2}\int_0^1 dte} \int DXe^{-\int_0^1 dt\frac{\dot{X}^2}{2e}} \tag{6.21}$$

где мы выделили гауссов интеграл во внешней одномерной метрике $e(t)$. Заметим сразу, что в силу репараметризационной инвариантности можно надеяться, что интеграл по одномерным метрикам так или иначе сведется к интегралу по длинам траекторий $T = \int_0^1 dte$.

Об этом дальше, а сначала рассмотрим гауссов интеграл по координатам, в котором сразу выберем $e(t) = T$

$$I(T) = \int DXe^{-\int_0^1 dt\frac{\dot{X}^2}{2T}} \tag{6.22}$$

Пусть для определенности $X(t)$ определена на отрезке $t \in [0,1]$ с нулевыми граничными условиями $X(0) = 0$ и $X(1) = 0$ [2]. В пространстве таких функций можно выбрать естественный базис, и любую функцию представить как

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sin(\pi kt), \quad \dot{X}(t) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} kx_k \cos(\pi kt) \tag{6.23}$$

Тогда

$$S[X] = \int_0^1 dt\frac{\dot{X}^2}{2T} = \frac{\pi^2}{2T}\sum_{k,l=1}^{\infty} kx_k lx_l \int_0^1 dt\cos(\pi kt)\cos(\pi lt) = \frac{\pi^2}{4T}\sum_{k=1}^{\infty} k^2x_k^2 \tag{6.24}$$

а меру интегрирования было бы естественно определить как $DX = \mathcal{N}\prod_{k=1}^{\infty} dx_k$, где $\mathcal{N}$ - некоторая “нормировочная” постоянная. Строго говоря, так поступать нельзя - в том смысле, что постоянная $\mathcal{N}$ окажется “особой”, так как интегрирование в функциональном интеграле проводится вовсе не по гладким траекториям (вопрос из “теории меры”).

[2] Доказать, что для произвольных $X(0) = X_0$ и $X(1) = X_1$ сдвинув переменную интегрирования

$$X(t) = Y(t) + X_0 + \frac{X_1 - X_0}{T}t$$

и считая, что при линейном сдвиге $DX = DY$, мы получим, что

$$\int_{X(0)=X_0, X(1)\ =X_1} DXe^{-\int_0^1 dt\frac{\dot{X}^2}{2T}} = e^{-\frac{(X_1-X_0)^2}{2T}} I(T)$$

Результат интегрирования в (6.22) теперь легко формально записать в виде

$$
\begin{aligned}
I(T) &= \mathcal{N} \int \prod_{k=1}^{\infty} dx_k \exp\left(-\frac{\pi^2}{4T} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x_k^2\right) = \\
&= \mathcal{N} \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{a_k}}\Bigg|_{a_k=\frac{\pi^2 k^2}{2T}} = \mathcal{N} \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{4T}{\pi k^2}}
\end{aligned}
\tag{6.25}
$$

и для интерпретации этого ответа необходимо сначала определить нормировочную константу $\mathcal{N}$.

Заметим, например, что при переопределении $t = \tau/T$ действие (6.24) можно переписать как

$$
S[X] = \int_0^1 dt \frac{\dot{X}^2}{2T} = \tfrac{1}{2} \int_0^T d\tau \left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 \tag{6.26}
$$

При этом константу $\mathcal{N}$ можно зафиксировать, например, потребовав

$$
\int DX e^{-\frac{1}{2}\|X\|^2} = \int DX e^{-\frac{1}{2}\int_0^T d\tau X^2} = \mathcal{N} \int \prod_{k=1}^{\infty} dx_k \exp\left(-\frac{T}{4} \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right) = 1 \tag{6.27}
$$

что с очевидностью даёт $\mathcal{N} = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{T}{4\pi}}$. Заметим, что величину $T = \int_0^1 dt e(t)$ можно считать естественной “длиной траектории”, а

$$
\|X\|^2 = \int_0^T d\tau X(\tau)^2 = \int_0^T dt\ T X(t)^2 = \int_0^T dt e(t) X(t)^2 \tag{6.28}
$$

представляет собой ничто иное как репараметризационно-инвариантную норму. Тогда

$$
I(T) = \mathcal{N} \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{4T}{\pi k^2}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{T}{\pi k} \tag{6.29}
$$

Чему равно бесконечное произведение в правой части? По уже опробованному рецепту после логарифмирования

$$
\log I(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \log T - \sum_{k=1}^{\infty} \log(\pi k) \tag{6.30}
$$

бесконечную константу можно “забыть”, а коэффициент перед $\log T$

$$
\sum_{k=1}^{\infty} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}\Bigg|_{s=0} = \zeta(0) = -\tfrac{1}{2} \tag{6.31}
$$

вычислить, например, с помощью аналитического продолжения ζ-функции. Таким образом, получаем

$$I(T) = \int_{X(0)=0}^{X(1)=0} DX e^{-\int_0^1 dt \frac{\dot{X}^2}{2T}} = \frac{\text{const}}{\sqrt{T}} \tag{6.32}$$

а конечной перенормировкой константу можно считать равной единице.

Очевтдные обобщения:

- В случае многих переменных $X_\mu = X_\mu(t)$, $\mu = 1, \ldots, d$ - для d-мерной релятивистской механики

$$I(T) = \int_{X_\mu(0)=0}^{X_\mu(1)=0} DX e^{-\int_0^1 dt \frac{\dot{X}_\mu^2}{2T}} = \frac{1}{T^{d/2}} \tag{6.33}$$

- а для ненулевых граничных условий

$$I(T|X_1^\mu, X_0^\mu) = \int_{X^\mu(0)=X_0^\mu}^{X^\mu(1)=X_1^\mu} DX e^{-\int_0^1 dt \frac{\dot{X}_\mu^2}{2T}} = \frac{e^{\frac{(X_1^\mu - X_0^\mu)^2}{2T}}}{T^{d/2}} \tag{6.34}$$