Математические основы естествознания. Теория струн. 4

1. Вычислить интегралы:

   а) $\int_{\mathbb{R}} x^n e^{-x^2} dx$, для всех натуральных n.

   б) $\int_{\mathbb{C}} z^n \bar{z}^m e^{-|z|^2} d^2 z$, для всех натуральных n и m.

2. Пусть A - положительно определенная матрица размера $n \times n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Обозначим

$$\langle f(x) \rangle := \frac{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\frac{1}{2}(x,Ax)} dx}{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(x,Ax)} dx}$$

   а) Вычислить гауссов интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(x,Ax)} dx$ и величины $\langle x_i \rangle$, $\langle x_i x_j \rangle$.

   б) Пусть $n = 3$: вычислить $\langle x_1^2 x_2 x_3 \rangle$.

3. Для одномерной свободной частицы с лагранжианом $L = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ найдите ядро оператора эволюции $K(x, t; x_0, t_0) = \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} | x_0 \rangle$ как функцию конечных значений времени и координат. Какому дифференциальному уравнению удовлетворяет $K(x, t; x_0, t_0)$ как функция переменных x и t.

4. Рассмотрим оператор $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{1}{T^2}\frac{\partial}{\partial y^2}$ определенный на торе $0 \leq x, y \leq 1$ на функциях периодических по x и y.

   а) Перечислить все собственные значения оператора Δ.

   б) Можно ли определить детерминант $\det(-\Delta)$. Если да, вычислите его.