# 1 Вводная лекция

# 2 Классическая струна Полякова

# 3 Основные идеи квантовой теории струн

# 4 Действие классической струны и квантовые амплитуды

# 5 Каноническое квантование и струнный спектр

# 6 Континуальный интеграл Фейнмана-Полякова

# 7 Мера в интеграле по геометриям

Перейдем теперь к более детальному обсуждению меры интегрирования в континуальном интеграле. Начнем с регуляризации детерминантов и ее интерпретации.

## 7.1 Регуляризация и формула Пуассона

Распишем теперь аккуратнее результат гауссова интегрирования по координатам частицы во внешней одномерной метрике $e(t) = T$

$$S[X;T] = \int_0^1 dt \frac{\dot{X}^2}{2T} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 dt\ TX\left(-\frac{1}{T^2}\frac{d^2}{dt^2}\right)X = \tfrac{1}{2}(X, \Delta X) \tag{7.1}$$

где скалярное произведение согласовано с репараметризационно-инвариантной нормой

$$\|X\|^2 = \int_0^T d\tau X(\tau)^2 = \int_0^1 dt\ TX(t)^2 = \int_0^1 dte(t)X(t)^2 \tag{7.2}$$

Для нулевых граничных условий $\int DXe^{-S[X;T]} = (\det\Delta)^{-D/2}$, где

$$\det\Delta = \det\left(-\frac{1}{T^2}\frac{d^2}{dt^2}\right) = \prod_{n>0}\frac{\pi^2 n^2}{T^2} \tag{7.3}$$

или [1]

$$
\begin{aligned}
D(T) &= -\log\det\left(-\frac{1}{T^2}\frac{d^2}{dt^2}\right) = -\mathrm{Tr}\log\left(-\frac{1}{T^2}\frac{d^2}{dt^2}\right) = \\
&= -\sum_{n>0}\log\frac{\pi^2 n^2}{T^2} = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\sum_{n>0} e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{T^2}}
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

Ряд под интегралом сходится абсолютно при $t > 0$, но сам интеграл по параметру расходится на нижнем пределе $t \to 0$. Можно ввести регуляризацию - обрезание этого интеграла при $\epsilon^2 > 0$

$$
\begin{aligned}
D(T|\epsilon) &= \int_{\epsilon^2}^\infty \frac{dt}{t}\sum_{n>0} e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{T^2}} \underset{t=T^2 x}{=} \int_{\epsilon^2/T^2}^\infty \frac{dx}{x}\sum_{n>0} e^{-\pi^2 n^2 x} = \\
&= \int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\sum_{n>0} e^{-\pi^2 n^2 x} + \int_1^\infty \frac{dx}{x}\sum_{n>0} e^{-\pi^2 n^2 x} = \\
&\equiv D_0(T|\epsilon) + D_1
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

Второе слагаемое не зависит не только от $\epsilon$, но и от длины траектории $T$, и является конечной константой.

Для манипуляций с первым членом удобно вспомнить про тэта-функции и тэта-константы:

$$
\begin{aligned}
\theta(z|\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi\tau n^2 + 2\pi i n z} \\
\theta(0|i\pi x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi^2 n^2 x} = 1 + 2\sum_{n>0} e^{-\pi^2 n^2 x}
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

[1] Это все те же формальные манипуляции с $\zeta$-функциями:

$$
\begin{aligned}
\zeta_\Delta(s) &= \sum_k \lambda_k^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{dt}{t} t^s \sum_k e^{-\lambda_k t} = s\zeta_\Delta(0)' + O(s^2) \\
\zeta_\Delta(0)' &= -\sum_k \lambda_k^{-s}\log\lambda_k\Big|_{s=0} = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\sum_k e^{-\lambda_k t}
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

и их модулярные преобразования [2]

$$\theta(0|-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\theta(0|\tau)$$
$$\theta(0|i\pi x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\theta(0|i/\pi x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\left(1 + 2\sum_{n>0} e^{-\frac{n^2}{x}}\right) \tag{7.10}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} D_0(T|\epsilon) &= \int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\sum_{n>0} e^{-\pi^2 n^2 x} = \tfrac{1}{2}\int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\left(\theta(0|i\pi x) - 1\right) = \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi x}} - 1\right) + \int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\sum_{n>0} e^{-\frac{n^2}{x}} = \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi x}} - 1\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}}\sum_{n>0} e^{-\frac{n^2}{x}} \end{aligned} \tag{7.11}$$

где второе слагаемое в правой части представляет собой уже сходящийся интеграл, т.е. опять независящую от $T$ конечную константу. Тем самым мы выделили расходимость

$$\begin{aligned} D_{\text{sing}}(T|\epsilon) &= \tfrac{1}{2}\int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi x}} - 1\right) = -\left(\frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \log\sqrt{x}\right)\Bigg|_{\epsilon^2/T^2}^1 = \\ &= \frac{T}{\sqrt{\pi}\epsilon} - \log\frac{T}{\epsilon} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{T}{\sqrt{\pi}\epsilon} - \log\frac{T}{\epsilon} + \text{finite} \end{aligned} \tag{7.12}$$

и получили, что

$$\det\left(-\frac{1}{T^2}\frac{d^2}{dt^2}\right) \simeq\ e^{-D_{\text{sing}}(T|\epsilon)} = \frac{T}{\epsilon}\exp\left(-\frac{T}{\sqrt{\pi}\epsilon}\right) \tag{7.13}$$

с точностью до конечной константы.

---

[2] Являющиеся следствием формул пересуммирования Пуассона

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(z-k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i n z}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} dz f(z) e^{-2\pi i n z} \tag{7.8}$$

для функции $f(z) = e^{-\pi^2 x z^2}$ при $x > 0$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi^2 x k^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} dz e^{-\pi^2 x z^2} e^{-2\pi i n z} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\sqrt{\pi}}{\pi\sqrt{x}} e^{-\frac{n^2}{x}} \tag{7.9}$$

## 7.2 Перенормировка: простейший вариант

Таким образом, для интеграла по путям частицы в $D$-мерном пространстве-времени получаем равенство (с точностью до конечных констант)

$$e^{-\frac{1}{2}Tm^2} I(T) = e^{-\frac{T}{2}\left(m^2 - \frac{D}{\sqrt{\pi}\epsilon}\right)} \left(\frac{\epsilon}{T}\right)^{D/2} \tag{7.14}$$

и видим, что ответ имеет особенности при $\epsilon \to 0$ в двух местах. Важно, что обе эти особенности *устранимы*.

- Общий фактор $\epsilon^{D/2}$, как уже говорилось, связан с тем, что мы пытались выразить меру через интегрирование по коэффициентам Фурье. Это определение плохо учитывает вклад недифференцируемых траекторий, поэтому его можно использовать лишь с точностью до именно такого особого множителя. К счастью, сам этот множитель не зависит ни от каких физических параметров - прежде всего от длины $T = \int_0^1 dte(t)$, поэтому его можно просто "загнать в нормировку" меры.

- С сингулярной зависимостью от $\epsilon$ в экспоненте формулы (7.14) дело хуже, но избавиться от него можно очевидным образом: считать что затравочная масса сама зависит от обрезания $\epsilon$, т.е. $m \to m_0(\epsilon)$, так что именно

$$m_0^2(\epsilon) - \frac{D}{\sqrt{\pi}\epsilon} = m^2 \tag{7.15}$$

  и является реальной физической массой частицы. Эта процедура, на первый взгляд полная глупость, называется квантовой перенормировкой классических параметров теории, и имеет реальный физический смысл [3].

- Теории, в которых сингулярности, возникающие при снятии обрезания, можно устранить переопределением изначально существующих в них параметров, называются *перенормируемыми*. Физический смысл перенормируемости достаточно прост - в таких теориях физика больших расстояний не зависит от того, что происходит на малых. В нашем случае - квантовые поправки к классическим траекториям частицы лишь слегка подправляют классическое движение по прямым, а вклады старших Фурье-мод несущественны.

## 7.3 Мера на одномерных метриках

Таким образом, после проведенной перенормировки нам осталось проинтегрировать по метрикам $De$ выражение $e^{-\frac{Tm^2}{2}}/T^{D/2}$, зависящее только от длины $T = \int_0^1 dte(t)$. При этом

[3] Так например в данном случае легко понять, что если мы вычисляем на решетке с шагом $\epsilon$ сумму $\sum_{A\to B} e^{-mL(A,B)}$, где - $L(A,B)$ расстояние между точками $A$ и $B$, то такая сумма имеет непрерывный предел только если сделать затравочную массу зависимой от шага решетки $\epsilon$.

естественно считать, что

$$\int De\ f(T) = \int \frac{D\varepsilon}{\mathcal{V}} \int_0^\infty dT J(T) f(T) = \int_0^\infty dT J(T) f(T) \tag{7.16}$$

где $\frac{D\varepsilon}{\mathcal{V}}$ отвечает интегралу по группе преобразований, нормированный на ее объем, а $J(T)$ - якобиан, возникающих при замене переменных.

Разберем сначала уже "набивший оскомину" пример двумерного интеграла

$$\int \frac{dxdy}{2\pi} f(\sqrt{x^2+y^2}) = \int \frac{d\phi}{2\pi} \int rdrf(r) = \int rdrf(r) \tag{7.17}$$

который является буквальным примером нашего интеграла после отождествлений

$$\int De \leftrightarrow \int \frac{dxdy}{2\pi}, \quad \int \frac{D\varepsilon}{\mathcal{V}} \leftrightarrow \int \frac{d\phi}{2\pi}, \quad r \leftrightarrow T, \quad J(r) = r \tag{7.18}$$

Заметим, что якобиан можно вычислить следующим образом:

- Мера $\frac{dxdy}{2\pi}$ отвечает двумерной метрике $dx^2 + dy^2$;
- Определим якобиан гауссовым интегралом в *касательном* пространстве:

$$\begin{aligned} 1 &= \int \frac{d(\delta x)d(\delta y)}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left((\delta x)^2+(\delta y)^2\right)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int J(r) d(\delta r) d(\delta\phi) e^{-\frac{1}{2}\left((\delta r)^2+r^2(\delta\phi)^2\right)} = \frac{J(r)}{r} \end{aligned} \tag{7.19}$$

  который приводит, естественно, к ожидаемому ответу. Это одна из реализаций известного *трюка* Фаддеева-Попова.

По аналогии, для меры $De$ введем репараметризационно-инвариантную норму в пространстве малых вариаций $\delta e$

$$\|\delta e\|^2 = (\delta e, \delta e) = \int_0^1 dt e^{-1} (\delta e)^2 \tag{7.20}$$

и попытаемся ввести координаты во взаимно-ортогональных направлениях относительно этого скалярного произведения. При инфинитезимальной замене параметра на траектории $t \to t + \varepsilon(t)$ одномерная метрика меняется почти очевидным образом

$$\delta_\varepsilon e = -\dot{\varepsilon} e - \varepsilon \dot{e} = -\frac{d}{dt}(\varepsilon e) \tag{7.21}$$

и совсем очевидно, что ортогональным этому направлению $(\delta_\varepsilon e, \delta_T e)$ при $\varepsilon(0) = \varepsilon(1) = 0$ будет вариация размера $\delta_T e = \frac{\delta T}{T} e$, а на подмногообразии постоянных метрик просто

$$\delta_T e(t) = \delta T \tag{7.22}$$

Больше никаких независимых направлений быть не должно - заменой параметра на траектории любую одномерную метрику можно сделать не зависящей от этого параметра. При этом для полной вариации из нормы (7.20) получим

$$\|\delta e\|^2 = \int_0^1 dt e^{-1}(\delta e)^2 = \int_0^1 dt e^{-1}(\delta_\varepsilon e + \delta_T e)^2 =$$
$$= \int_0^1 dt e^{-1}\left(\frac{d}{dt}(\varepsilon e)\right)^2 + \frac{(\delta T)^2}{T^2}\int_0^1 dt e = \int_0^1 dt\ e^3\ \varepsilon\left(-e^{-2}\frac{d}{dt}e^{-1}\frac{d}{dt}e\right)\varepsilon + \frac{(\delta T)^2}{T} = \tag{7.23}$$
$$= \int_0^1 dt\ e^3\ \varepsilon\Delta_\varepsilon(e)\varepsilon + \frac{(\delta T)^2}{T} = (\varepsilon, \Delta_\varepsilon(e)\varepsilon) + \frac{(\delta T)^2}{T}$$

где мы ввели зависящий от метрики оператор Лапласа и инвариантную норму на векторных полях

$$\Delta_\varepsilon(e)\varepsilon = -e^{-2}\frac{d}{dt}e^{-1}\frac{d}{dt}e\cdot\varepsilon, \qquad \|\varepsilon\|^2 = (\varepsilon,\varepsilon) = \int_0^1 dt\ e^3\ \varepsilon^2 \tag{7.24}$$

После этого якобиан перехода от меры интегрирования по метрикам можно определить стандартным образом

$$1 = \int D(\delta e)\ e^{-\frac{1}{2}\|\delta e\|^2} = \int d(\delta T)\int D\varepsilon\ e^{-\frac{1}{2}\|\delta e\|^2}J(T) =$$
$$= J(T)\int d(\delta T)e^{-\frac{1}{2}\frac{(\delta T)^2}{T}}\int D\varepsilon\ e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon,\Delta_\varepsilon(T)\varepsilon)} = J(T)\sqrt{\frac{T}{\det\Delta_\varepsilon(T)}} \tag{7.25}$$

т.е. $J(T) = \sqrt{\frac{\det\Delta_\varepsilon(T)}{T}}$, где детерминант оператора

$$\Delta_\varepsilon(T) = -e^{-2}\frac{d}{dt}e^{-1}\frac{d}{dt}e\Big|_{e(t)=T} = -\frac{1}{T^2}\frac{d^2}{dt^2} \tag{7.26}$$

действующего на функциях (векторных полях) $\varepsilon(t)$, $0 < t < 1$, который мы уже вычислили (7.13). С учетом перенормировки массы и изменения нормировки меры можно считать, что $\Delta_\varepsilon(T) \simeq T$, как и детерминант оператора (7.3), возникающего из квантовых флуктуаций координат частицы.

## 7.4 Результат для пропагатора частицы

Таким образом, $J(T) = 1$, и мы окончательно получаем

$$\mathcal{K}(X_1, X_0) = \int_{X(0)=X_0, X(1)=X_1} DeDX\ e^{-\int_0^1 dt\left(\frac{\dot{X}^2}{2e}+\frac{1}{2}em^2\right)} =$$
$$= \int De\ e^{-\frac{m^2}{2}T}\int_{X(0)=X_0,X(1)=X_1} DXe^{-\int_0^1 dt\frac{\dot{X}^2}{2e}} = \int_0^\infty dT\ \frac{e^{-\frac{(X_1^\mu - X_0^\mu)^2}{2T}-\frac{m^2}{2}T}}{T^{D/2}} \tag{7.27}$$

что представляет собой представление в виде интеграла по собственному времени для фейнмановского пропагатора, или причинной функции Грина - после аналитического продолжение в пространство Минковского. Интегральное представление удобно для анализа, например, асимптотических свойств:

- Ультрафиолетовое поведение на малых расстояниях, при $|X_1 - X_0| \to 0$, определяется вкладом малых длин $T$, массой частицы при этом можно пренебречь, и сделав замену переменных легко получить, что $\mathcal{K}(X_1, X_0) \sim \frac{1}{|X_1 - X_0|^{D-2}}$ при $D > 2$.
- Инфракрасное поведение наоборот определяется свойствами интеграла при больших $T$, тут значение квадрата массы становится определяющим. Для массивных частиц $m^2 > 0$ интеграл подавлен при $|X_1 - X_0| > 1/m$, для безмассовых частиц возникает "дальнодействие", ну а для тахионов с $m^2 < 0$ просто с треском расходится - чего и следовало бы ожидать в случае бозонной струны.