# Динамические системы, листок 3 (до 4.12.13)

*(оценка пропорциональна числу сданных пунктов задач)*

Все векторные поля в этом листке предполагаются гладкими.

Слово **“придумайте”** везде означает “запишите формулой”, а не “нарисуйте”.

**Определение.** Векторные поля $u$ в области $U \subset \mathbb{R}^n$ и $v$ в области $V \subset \mathbb{R}^n$ называются *дифференцируемо эквивалентными*, если существует диффеоморфизм $f : U \to V$, переводящий $u$ в $v$, то есть $f_* u = v$. Поля $u$ и $v$ называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $f : U \to V$, переводящий траектории $u$ в траектории $v$: если $\varphi : \mathbb{R} \to U$ – траектория $u$, то $f \circ \varphi : \mathbb{R} \to V$ – траектория $v$, и любая траектория $v$ получается таким образом. Поля $u$ и $v$ называются *орбитально эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $f : U \to V$, переводящий фазовые кривые $u$ в фазовые кривые $v$: если $C$ – фазовая кривая $u$, то $f(C)$ – фазовая кривая $v$, и любая фазовая кривая $v$ получается таким образом.

**1.** Опишите классы эквивалентности линейных векторных полей **на плоскости** относительно **(а)** дифференцируемой эквивалентности, **(б)** топологической (должно получиться бесконечно много классов эквивалентности!) и **(в)** орбитальной.

**2$^{\text{х}}$.** Найдите в интернете и разберите пример векторного поля в $\mathbb{R}^3$, которое удовлетворяет условию теоремы Гробмана-Хартмана и поэтому топологически эквивалентно своей линейной части, но при этом не дифференцируемо эквивалентно.

**Определение.** Векторное поле называется *полным*, если все его траектории продолжаются на всю временную ось.

**3.** *(компактификация прямой)* Придумайте вложение прямой в плоскость, при котором образ неполного векторного поля $(1 + x^2)\frac{\partial}{\partial x}$ продолжается до полного векторного поля на плоскости.

**4.** Придумайте векторное поле на сфере с одним нулем. **б$^{\text{х}}$)** Докажите, что векторных полей без нулей на сфере не бывает.

**5. а)** Придумайте линейное векторное поле в $\mathbb{R}^4$, у которого замыкание какой-нибудь фазовой кривой было бы двумерным тором $x_1^2+x_2^2 = x_3^2+x_4^2 = 1$. **б$^{\text{х}}$)** Опишите классы орбитальной эквивалентности линейных векторных полей в $\mathbb{R}^4$.

**Определение.** Ноль $x_0$ поля $v$ называется *асимптотически устойчивым*, если
**1** (устойчивость по Ляпунову) для любой окрестности $U \ni x_0$ существует окрестность $V \ni x_0$, такая, что для любой траектории $\varphi$ из $\varphi(0) \subset V$ следует $\varphi\big([0, +\infty)\big) \subset U$.
**2** (сходимость) существует окрестность $V \ni x$, такая, что для любой траектории $\varphi$ из $\varphi(0) \subset V$ следует $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = x_0$.

**6.** Покажите, что ни одно из условий **1** и **2** не следует из другого.

**7.** Придумайте асимптотически устойчивый ноль векторного поля, линеаризация которого не является асимптотически устойчивой.

**8.** *(весит как три задачи!)* Придумайте два векторных поля на плоскости, которые дифференцируемо эквивалентны друг другу в достаточно малой окрестности каждой точки, но орбитально неэквивалентны на всей плоскости.