ПУЧКИ И ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

ЛИСТОК 4: ЛОКАЛЬНО ПОСТОЯННЫЕ ПУЧКИ И ПРОИЗВОДНЫЙ ФУНКТОР ПРЯМОГО ОБРАЗА

Осень 2013 года

Пучок (множеств или абелевых групп) $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве X называется *локально постоянным* со слоем (множеством или абелевой группой) A, если у любой точки $x \in X$ найдется открытая окрестность $x \in U \subset X$, такая что ограничение пучка $\mathcal{F}$ на открытое подмножество U изоморфно (как пучок множеств или абелевых групп, соответственно) постоянному пучку $\underline{A}_U$.

Топологическое пространство X называется *локально связным* (*локально линейно связным*, *локально односвязным*), если оно допускает базу топологии, состоящую из связных (линейно связных, односвязных) (в индуцированной топологии) открытых подмножеств.

Задача 1. Покажите, что пучок множеств $\mathcal{F}$ на локально связном топологическом пространстве X является локально постоянным со слоем A тогда и только тогда, когда связанное с $\mathcal{F}$ "накрытие" (в смысле определения, дававшегося в этом курсе) $\widetilde{\mathcal{F}} \longrightarrow X$ является накрытием пространства X со слоем A в смысле определения, дававшегося в курсе топологии.

Задача 2. Пусть X — линейно связное, локально линейно связное, локально односвязное топологическое пространство и $x \in X$ — фиксированная точка. Постройте взаимно-однозначное соответствие (эквивалентность категорий) между

а) локально постоянными пучками множеств $\mathcal{F}$ на X со слоем $\mathcal{F}_x = A$ и гомоморфизмами из фундаментальной группы $\pi_1(X, x)$ пространства X в группу перестановок множества A;

б) локально постоянными пучками абелевых групп на X со слоем $\mathcal{F}_x = A$ и гомоморфизмами из фундаментальной группы $\pi_1(X, x)$ пространства X в группу автоморфизмов абелевой группы A.

Задача 3. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $y = (0,0) \in X$, $U = X \setminus \{y\}$, $x = (1,0) \in U$, и $j\colon U \longrightarrow X$ — отображение вложения.

а) Пусть $\mathcal{G}$ — локально постоянный пучок абелевых групп на U со слоем $\mathcal{F}_x = A$ и автоморфизмом монодромии $\phi\colon A \longrightarrow A$, связанным с действием элемента фундаментальной группы $\pi_1(U, x)$, представляющим собой обход один раз против часовой стрелки вокруг точки y. Вычислите слой пучка $j_*\mathcal{G}$ в точке $y \in X$.

б) Пусть $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на X, ограничение которого на U является локально постоянным пучком. Обозначим через A и B слои пучка $\mathcal{F}$ в точках x и y. Какие отображения надо задать между группами A и B, и какие условия наложить на эти отображения, чтобы по ним однозначно восстанавливался произвольный пучок $\mathcal{F}$ описанного вида?

Всюду ниже под "предпучками" и "пучками" понимаются предпучки и пучки абелевых групп. Последовательность пучков и гомоморфизмов $\cdots \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \cdots$ называется *комплексом пучков*, если композиция каждой пары соседних отображений (называемых *дифференциалами*) равна нулю, т.е. $d^2 = 0$. *Пучками когомологий* комплекса пучков называются факторпучки ядер дифференциалов по их образам, т.е., пучком когомологий комплекса $\cdots \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \cdots$ в члене $\mathcal{Q}$ называется факторпучок ядра гомоморфизма пучков $\mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{R}$ по образу гомоморфизма пучков $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$.

Пусть $f\colon X \longrightarrow Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на X, и пусть $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow \mathcal{F}^2 \longrightarrow \cdots$ — его каноническая резольвента. *Производным функтором прямого образа* R^*f_* называется последовательность операций (функторов) $R^if_*,\ \ i \geqslant 0$, сопоставляющих пучку $\mathcal{F}$ на пространстве X пучки когомологий комплекса пучков $f_*\mathcal{F}^\bullet = (0 \longrightarrow f_*\mathcal{F}^0 \longrightarrow f_*\mathcal{F}^1 \longrightarrow f_*\mathcal{F}^2 \longrightarrow \cdots)$ на пространстве Y.

Задача 4. В ситуации выше, сопоставим каждому открытому подмножеству $V \subset Y$ группу когомологий $H^i(U, \mathcal{F}|_U)$, где $U = f^{-1}(V) \subset X$. Покажите, что

а) сформулированное правило определяет предпучок $\mathcal{H}^i(X/Y, \mathcal{F})$ на пространстве Y;

б) пучок, ассоциированный с предпучком $\mathcal{H}^i(X/Y, \mathcal{F})$, изоморфен пучку $R^if_*(\mathcal{F})$ на Y;

в) пучок $R^0f_*(\mathcal{F})$ изоморфен $f_*\mathcal{F}$.

Задача 5. Покажите, что с короткой точной последовательностью

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

пучков на X связана длинная точная последовательность

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow f_*\mathcal{A} \longrightarrow f_*\mathcal{B} \longrightarrow f_*\mathcal{C} \longrightarrow R^1f_*(\mathcal{A}) \\ \longrightarrow R^1f_*(\mathcal{B}) \longrightarrow R^1f_*(\mathcal{C}) \longrightarrow R^2f_*(\mathcal{A}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

пучков на Y.

Задача 6. Покажите, что производный функтор R^*f_* можно вычислять, используя вместо канонических резольвент

а) произвольные мягкие резольвенты, если пространства X и Y паракомпактны и хаусдорфовы;

б) произвольные вялые резольвенты, для любых пространств X и Y.

(Пучок $\mathcal{F}$ на пространстве X называется *вялым*, если любое его сечение над открытым подмножеством $U \subset X$ можно продолжить до сечения над всем X, и *мягким*, если любое его сечение над замкнутым подмножеством $Z \subset X$ можно продолжить до сечения над всем X.)

Задача 7. Вычислите (т.е., опишите в терминах конструкций из этого и предыдущих листков) пучки $R^if_*(\mathbb{Z})$ для всех $i \geqslant 0$ и следующих отображений топологических пространств $f\colon X \longrightarrow Y$

а) вложение внутренности круга $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ в плоскость $\mathbb{R}^2$;

б) вложение плоскости без точки $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ в плоскость;

в) вложение пространства без окружности $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ в $\mathbb{R}^3$;

г) вложение дополнения в $\mathbb{R}^3$ к нарисованной на плоскости восьмерке в $\mathbb{R}^3$;

д) вложение дополнения к конусу $\{x^2 + y^2 \neq z^2\} \subset \mathbb{R}^3$ в пространство $\mathbb{R}^3$;

е) двулистное накрытие окружности окружностью;

ж) n-листное накрытие окружности окружностью;

з) проекция тора $S^1 \times S^1$ на окружность S^1;

и) проекция бутылки Клейна K^2, представленной в виде расслоения над окружностью со слоем окружность, на окружность — базу расслоения;

к) отображение $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, заданное формулой $f(z) = z^n$;

л) проекция сферы, вложенной в трехмерное пространство $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ на плоскость $\mathbb{R}^2$;

м) проекция сферы, вложенной в трехмерное пространство, на прямую $\mathbb{R}^1$.

Задача 8. В обозначениях задачи 3а), вычислите пучки $R^if_*(\mathcal{G}),\ \ i \geqslant 1$, на пространстве X в терминах абелевой группы A и отображения ϕ.