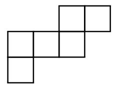
Характеры представлений симметрических групп II

0. Напоминание. Пусть $\chi_{\lambda\mu}$ — значение характера неприводимого представления симметрической группы S_n, соответствующего диаграмме Юнга λ из n клеток, на перестановке с циклической структурой, соответствующей разбиению μ числа n.



Связные наборы клеток, содержания которых образуют промежуток целых чисел, называются *лентами*[1]; их можно еще описать как связные множества клеток, не содержащие клеток на одной (идущей влево-вниз) диагонали.

Ленточная таблица формы λ и веса μ — это нестрого монотонная по строкам и столбцам таблица формы λ, в которой клетки с числом i образуют ленту длины μ_i. *Знак* ленты полагаем равным -1, если она имеет четную высоту и $+1$ иначе; знак ленточной таблицы — произведение знаков входящих в нее лент.

Правило Мурнагана–Накаямы. $\chi_{\lambda\mu}$ равно числу ленточных таблиц формы λ и веса μ, подсчитанному с учетом знаков.

(В частности, ленточные таблицы веса (1^n) суть стандартные таблицы и все имеют знак плюс — это отлично согласуется с тем, что значение характера в единице равно размеру базиса Гельфанда–Цетлина.)

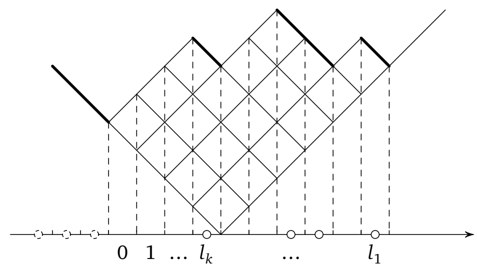
1. Разложение функций Шура по функциям Ньютона. Числа $\chi_{\lambda\mu}$ напоминают слегка числа Костки. При $\mu = (1^n)$ даже буквально $\chi_{\lambda\mu} = K_{\lambda\mu}$.

Лемма. $s_\mu p_k = \sum \operatorname{sgn}(\lambda/\mu) s_\lambda$, где сумма ведется по всем диаграммам λ, получающимся из μ добавлением k-клеточной ленты.

Другими словами, $a_{\mu+\delta} p_k = \sum \operatorname{sgn}(\lambda/\mu) a_{\lambda+\delta}$.

Вместо алгебраических манипуляций в духе доказательств из лекции 2 можно воспользоваться “бозонно-фермионным соответствием”, делающим эту лемму очевидной.

Диаграмма Юнга λ задается формой своей границы, т. е. последовательностью вертикальных и горизонтальных отрезков. Заменим эту последовательность на последовательность ячеек, в соответствующие вертикальным отрезкам ячейки положим по шарику (см. рис.). Другими словами, i-й строке диаграммы соответствует шарик в ячейке с номером $l_i = \mu_i + \delta_i$.



На этой картинке хорошо виден многочлен $a_{\mu+\delta}$: нужно просто сопоставлять набору шариков α моном x^α и считать шарики “фермионными” (т. е. брать антисимметризацию по разным нумерациям шариков)[2].

Пример: $\fbox{}\fbox{$\bullet$}\fbox{}\fbox{}\fbox{$\bullet$} \longrightarrow \fbox{}\fbox{②}\fbox{}\fbox{}\fbox{①} - \fbox{}\fbox{①}\fbox{}\fbox{}\fbox{②} \longrightarrow x_1^4 x_2 - x_1 x_2^4.$

Умножение на p_k соответствует сумме всевозможных сдвигов одного из шариков на k позиций вправо (при этом мы считаем нулевыми конфигурации, в которых несколько шариков попало в одну ячейку — им как раз соответствует нулевой многочлен).

А если смотреть на форму диаграммы Юнга, то сдвиг шарика соответствует добавлению к диаграмме ленточки, при котором снова получается диаграмма Юнга. Возникает

[1] Или косыми крюками; по-английски ribbon или rim hook.

[2] Формально: рассмотрим счетномерное пространство V с базисом e_i, $i \in \mathbb{Z}$; его *полубесконечной внешней степенью* будем называть векторное пространство, натянутое на косые мономы e_α, отличающиеся лишь в конечном числе позиций от $\ldots \wedge e_{-3} \wedge e_{-2} \wedge e_{-1}$. Наконец, будем отождествлять элементы $\Lambda^{\infty/2} V$ с кососимметрическими многочлена при помощи отображения $e_\alpha \leftrightarrow x^\alpha$.

в точности сумма диаграмм из утверждения леммы. Понятно и происхождение знаков: высота h ленты соответствует тому, что шарик перепрыгнул $h-1$ другой шарик — возникает знак цикла длины $h-1$. $\square$

Это лемма играет для чисел $\chi_{\lambda\mu}$ в точности ту же роль, что для чисел Костки играла формула Пьери: из нее мгновенно следует, что

$$p_\mu = \sum \chi_{\lambda\mu} s_\lambda \iff \chi_{\lambda\mu} = \langle s_\lambda, p_\mu \rangle \iff s_\lambda = \sum z_\mu^{-1} \chi_{\lambda\mu} p_\mu \qquad (*)$$

(контрольный вопрос: откуда взялись коэффициенты z_μ?).

2. Характеристическое отображение Фробениуса. Зададим отображение из центральных функций на симметрической группе S_n в симметрические функции степени n:

$$ch\colon f \mapsto \frac{1}{|S_n|} \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) p_\sigma = \sum_\mu z_\mu^{-1} f(\mu) p_\mu.$$

Предложение. Это отображение согласовано со скалярным произведением.

Куда это отображение переводит характер χ_λ неприводимого представления? Посмотрев немного на формулу (*) нетрудно понять, что в точности в многочлен Шура s_λ!

Теперь разные известные нам факты про симметрические многочлены получают представленческое истолкование. Например, ортонормальность многочленов Шура представляет собой соотношению ортогональности для характеров неприводимых представлений.