1 Вводная лекция

2 Классическая струна Полякова

3 Основные идеи квантовой теории струн

4 Действие классической струны и амплитуды

5 Каноническое квантование и струнный спектр

6 Континуальный интеграл Фейнмана-Полякова

7 Мера в интеграле по геометриям

8 Аномалия в континуальном интеграле

9 Двумерная конформная теория поля

9.1 Тензор энергии-импульса

Для действия Полякова мы давно уже определили тензор энергии-импульса

$$t_{\alpha\beta} = -\tfrac{1}{2}\left(\partial_\alpha X \partial_\beta X - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\alpha'\beta'} \partial_{\alpha'} X \partial_{\beta'} X\right) \tag{9.1}$$

который является симметричным тензором ранга 2 и сохраняется на уравнениях движения свободной скалярной теории $\partial^\alpha \partial_\alpha X = 0$

$$\nabla^\alpha t_{\alpha\beta} = 0 \tag{9.2}$$

Особенно просто это выглядит в комплексных координатах для конформной метрики

$$ds^2 = \rho dz d\bar{z} = e^\varphi dz d\bar{z} \tag{9.3}$$

где условие ковариантного сохранения (9.2) принимает вид

$$\partial_{\bar{z}} t_{zz} + \rho \partial_z (\rho^{-1} t_{z\bar{z}}) = 0 \tag{9.4}$$

вместе с комплексно-сопряженным уравнением, и для конформной теории (9.1) в силу $t_{z\bar{z}} = 0$ сводится к уравнению голоморфности

$$\partial_{\bar{z}} t_{zz} = 0, \qquad \partial_z t_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \tag{9.5}$$

на голоморфные токи спина 2, элементарно следующие из $\bar{\partial}\partial X = 0$, т.е. голоморфности производной ∂X.

В случае конформной аномалии все уже не так просто, поскольку след $g^{\alpha\beta}\langle t_{\alpha\beta}\rangle = aR + b$. Коэффициент b можно убрать с помощью контрчлена $\mu^2 \int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{g}$, поэтому обратим основное внимание на первое слагаемое, которое в конформной калибровке можно переписать в виде

$$\begin{gathered} 4\rho^{-1} t_{z\bar{z}} = aR = -2a\rho^{-1}\partial_z\partial_{\bar{z}}\log\rho \\ t_{z\bar{z}} = -\frac{a}{2}\partial_z\partial_{\bar{z}}\log\rho = -\frac{a}{2}\partial_z\partial_{\bar{z}}\varphi \end{gathered} \tag{9.6}$$

Уравнение (9.4) в этом случае принимает вид ($\rho = e^\varphi$)

$$\begin{gathered} 0 = \partial_{\bar{z}} t_{zz} + \rho\partial_z(\rho^{-1} t_{z\bar{z}}) = \partial_{\bar{z}} t_{zz} + \frac{a}{2}\partial_z\varphi\partial_z\partial_{\bar{z}}\varphi - \frac{a}{2}\partial_z^2\partial_{\bar{z}}\varphi = \\ = \partial_{\bar{z}}\left(t_{zz} + \frac{a}{4}(\partial_z\varphi)^2 - \frac{a}{2}\partial_z^2\varphi\right) \end{gathered} \tag{9.7}$$

т.е. голоморфной величиной при наличии аномалии является модифицированное выражение

$$T_{zz} = t_{zz} + \frac{a}{4}\left((\partial_z\varphi)^2 - 2\partial_z^2\varphi\right) \tag{9.8}$$

которое определяет конформные свойства квантовой теории.

9.2 Псевдотензор и центральный заряд

Выражение (9.8) уже не является тензором 2 ранга или 2-дифференциалом относительно голоморфных замен координат $z \to w(z)$. Действительно,

$$\begin{gathered} e^{\varphi(z,\bar{z})} dz d\bar{z} = e^{\varphi(w,\bar{w})} dw d\bar{w}, \qquad \varphi(z,\bar{z}) = \varphi(w,\bar{w}) + \log|w'(z)|^2 \\ \partial_z\varphi(z) = w'(z)\partial_w\varphi(w) + \frac{w''(z)}{w'(z)} \\ \partial_z^2\varphi(z) = w'(z)^2\partial_w^2\varphi(w) + w''(z)\partial_w\varphi(w) + \frac{w'''(z)}{w'(z)} - \left(\frac{w''(z)}{w'(z)}\right)^2 \end{gathered} \tag{9.9}$$

то есть добавка

$$\partial_z\varphi(z)^2 - 2\partial_z^2\varphi(z) = w'(z)^2\left(\partial_w\varphi(w)^2 - 2\partial_w^2\varphi(w)\right) - 2\{w, z\} \tag{9.10}$$

где мы ввели шварциан

$$\{w,z\} = \frac{w'''(z)}{w'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''(z)}{w'(z)}\right)^2 \tag{9.11}$$

Отсюда следует, что величина (9.8) также преобразуется неоднородно, т.е.

$$T_{zz}(z) = T_{ww}(w)w'(z)^2 - \frac{a}{2}\{w,z\} \tag{9.12}$$

и является псевдотензором (или проективной связностью), превращаясь в настоящий тензор лишь при $a = 0$. В инфинитезимальной форме, т.е. при $w(z) = z - \epsilon(z)$ с малыми отклонениями получим

$$\delta_\epsilon T(z) = 2\epsilon'(z)T(z) + \epsilon(z)\partial T(z) + \frac{c}{12}\epsilon'''(z) \tag{9.13}$$

где мы изменили нормировку коэффициента $a = \frac{c}{6}$. В такой нормировке он называется *центральным зарядом.*

9.3 Конформная симметрия и операторное разложение

В двумерной конформной квантовой теории поля голоморфные преобразования полей с фиксированной конформной размерностью Δ

$$\delta_\epsilon \Phi(z) = \Delta\epsilon'(z)\Phi(z) + \epsilon(z)\partial\Phi(z) \tag{9.14}$$

генерируются тензором энергии-импульса. Посмотрим, что это означает в теории скалярного поля.

В свободной скалярной безмассовой теории есть голоморфный ток размерности $(1,0)$

$$J(z) = i\partial X, \qquad \bar\partial J = 0 \tag{9.15}$$

что верно и в классическом и в квантовом случае. Коррелятор таких двух токов [1]

$$\langle J(z)J(z')\rangle = -\partial_z\partial_{z'}\langle X(z,\bar z)X(z',\bar z')\rangle = \partial_z\partial_{z'}\log|z-z'|^2 = \frac{1}{(z-z')^2} \tag{9.16}$$

Посмотрим теперь на произведение *операторов* $J(z)$ в *квантовой* теории:

$$J(z)J(z') = \langle J(z)J(z')\rangle + :J(z)J(z'): \tag{9.17}$$

где нормальное произведение пока достаточно понимать в том смысле, что $\langle :(\ldots):\rangle = 0$. Разложив (9.17) в ряд Лорана при $z \to z'$, естественным образом получим

$$J(z)J(z') \underset{z\to z'}{=} \frac{1}{(z-z')^2} + :J(z')^2: + (z-z'):\partial J(z')J(z'): + \ldots \tag{9.18}$$

[1] Мы выбрали нормировку, в которой $\langle X(z,\bar z)X(z',\bar z')\rangle = -\alpha'\log|z-z'| = -\log|z-z'|^2$.

Первый член этого разложения сингулярен, второй - функция от z', остальные исчезают при совпадении точек. Это - пример операторного разложения в теории поля.

Сингулярность в операторном разложении связана с некоммутативностью операторов. Действительно, посмотрим на разложение

$$J(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha_k}{z^{k+1}} \tag{9.19}$$

на плоскости с отмеченной точкой $z = 0$, куда вставлен какой-либо оператор $\Phi(0)$. Действие на него компонент тока можно определить формулой Коши

$$\alpha_n \Phi(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz z^n J(z) \Phi(0) \tag{9.20}$$

эквивалентной операторному разложению

$$J(z)\Phi(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z^{k+1}} \alpha_k \Phi(0) \tag{9.21}$$

имеющему смысл лишь при условии $\alpha_k \Phi(0) = 0$ для всех $k < k_0$. Определим теперь действие двух операторов последовательным способом

$$\alpha_n \alpha_m \Phi(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz z^n J(z) \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0'} dz' z'^m J(z') \Phi(0) \tag{9.22}$$

где контур C_0 обходит точку $z = 0$ *вне* контура C_0', т.е. оператор α_n действует *после* α_m. Наоборот, для действия в обратном порядке

$$\alpha_m \alpha_n \Phi(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0'} dz' z'^m J(z') \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz z^n J(z) \Phi(0) \tag{9.23}$$

контур C_0 следует провести *внутри* контура C_0'. Рассмотрим теперь коммутатор

$$\begin{aligned} [\alpha_n, \alpha_m]\Phi(0) &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(\oint_{C_0} \oint_{C_0'} - \oint_{C_0'} \oint_{C_0} \right) dz dz' z^n J(z) z'^m J(z') \Phi(0) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0'} dz' z'^m \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{z'}} dz z^n J(z) J(z') \Phi(0) \end{aligned} \tag{9.24}$$

Стянем теперь контур интегрирования $C_{z'}$ к точке $z = z'$ и воспользуемся операторным произведением токов (9.18), тогда

$$\begin{aligned} [\alpha_n, \alpha_m] &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0'} dz' z'^m \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{z'}} dz z^n J(z) J(z') = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0'} dz' z'^m \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{z'}} dz z^n \left(\frac{1}{(z-z')^2} + \dots \right) \end{aligned} \tag{9.25}$$

где все несингулярные члены можно выкинуть, так как они не дают вклада в интеграл. Вычисляя контурные интегралы, окончательно получим

$$[\alpha_n, \alpha_m] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0'} dz' z'^m \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z'}} dz \frac{z^n}{(z-z')^2} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0'} dz' z'^m \; n z'^{n-1} = n\delta_{n+m,0} \tag{9.26}$$

т.е. канонические коммутационные соотношения осцилляторов разложения скалярного поля.

Обратим внимание теперь на оператор

$$\tfrac{1}{2} : J(z)^2 := -\tfrac{1}{2} : \partial X(z)^2 := T(z) \tag{9.27}$$

который естественно было бы считать аналогом классической голоморфной компоненты тензора энергии-импульса. Рассмотрим операторное разложение тензора энергии-импульса с током $J(z)$:

$$\begin{aligned} T(z)J(z') = \tfrac{1}{2} : J(z)^2 : \; J(z') &= \frac{J(z)}{(z-z')^2} + : J(z)J(z')^2 : + \ldots = \\ &= \frac{J(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial J(z')}{z-z'} + \ldots \end{aligned} \tag{9.28}$$

где мы опустили все несингулярные при $z \to z'$ вклады. Отсюда следует, что при бесконечно-малом координатном преобразовании $z \to z + \epsilon(z)$

$$\delta_\epsilon J(z) = \oint_{w \curvearrowright z} \frac{dw}{2\pi i}\epsilon(w)T(w)J(z) = \epsilon'(z)J(z) + \epsilon(z)J'(z) \tag{9.29}$$

т.е. ток преобразуется при голоморфных заменах координат как поле единичной размерности, т.е. инвариантом является $J(z)dz$, а генератором преобразования - ровно в указанном выше смысле - тензор энергии-импульса. Для (примарного) поля с произвольной размерностью Δ преобразования (9.14) следуют из операторного разложения

$$T(z)\Phi(z', \bar{z}') = \frac{\Delta}{(z-z')^2}\Phi(z', \bar{z}') + \frac{1}{z-z'}\partial\Phi(z', \bar{z}') + \ldots \tag{9.30}$$

что легко проверить прямой подстановкой.