

Математические основы естествознания. Теория струн. 7

1. Записать закон сохранения тензора энергии-импульса $\nabla^\alpha t_{\alpha\beta} = 0$ в конформной метрике $ds^2 = \rho(z, \bar{z})dzd\bar{z}$.
2. Вычислить коррелятор двух голоморфных токов

$$\langle J(z)J(w) \rangle = \langle 0|J(z)J(w)|0 \rangle$$

понимаемый как среднее по фоковскому вакууму $\alpha_n|0\rangle = 0$, $n \geq 0$ (и $\langle 0|\alpha_n = 0$, $n \leq 0$) от радиально-упорядоченного ($|z| > |w|$) произведения операторов

$$J(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha_k}{z^{k+1}}$$

коэффициенты разложения которых удовлетворяют коммутационным соотношениям $[\alpha_n, \alpha_m] = n\delta_{n+m,0}$.

3. Вычислить коррелятор двух голоморфных токов

$$\langle J(z)J(w) \rangle = -\langle \partial X(z)\partial X(w) \rangle = \frac{\int DX e^{-S} \partial X(z)\partial X(w)}{\int DX e^{-S}}$$

понимаемый как среднее для функционального интеграла в свободной скалярной теории с действием $S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha X \partial_\alpha X$.

4. В теории свободного скалярного поля вычислить сингулярные при $z \rightarrow w$ члены операторного разложения

а) $T(z)T(w)$, где тензор энергии-импульса $T(z) = -\frac{1}{2} : \partial X(z)^2 :$,

б) $T(z) : e^{i\alpha X(w,\bar{w})} :$; найти аномальную размерность упорядоченной экспоненты.