Косые многочлены Шура

0. Напоминание: индуцирование. Представление группы можно *ограничить на подгруппу*. У этого функтора есть сопряженный слева: $\operatorname{Hom}(\operatorname{Ind}_H^G W, V) \cong \operatorname{Hom}(W, \operatorname{Res}_H^G V)$ ("взаимность Фробениуса").

Как векторное пространство (и даже как H-представление) $\operatorname{Ind}_H^G W = V[G/H]$ (и действие G вводится естественный способом). Пример: регулярное представление есть результат индуцирования тривиального представления с тривиальной подгруппы.

Характер ограничения — ограничение центральной функции. Характер индуцирования — push-forward центральной функции:

$$\chi(\operatorname{Ind}_H^G W)(g) = \sum_{\sigma \in G/H} \chi(W)(\sigma^{-1} g \sigma),$$

где слагаемое считается нулевым, если $\sigma^{-1} g \sigma \notin H$ (в частности, характер индуцированного представления обращается в ноль на элементах, не сопряженных никакому элементу H).

1. Перемножение функций и представлений. На прошлой лекции было построено характеристическое отображение Фробениуса, переводящее центральные функции на S_n в симметрические функции степени n, при котором характер неприводимого представления χ_λ переходит в многочлен Шура s_λ.

Один из первых возникающих вопросов — каков представленческий смысл умножения симметрических функций. Ответ: нужно тензорно перемножить два представления, а потом индуцировать результат с $S_n \times S_m$ на S_{n+m},

$$\operatorname{ch}(U) \cdot \operatorname{ch}(V) = \operatorname{ch}\big(\operatorname{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}}(U \boxtimes V)\big).$$

(указание: воспользуйтесь мультипликативностью следа при тензорном произведении и формулой для характера индуцированного представления).

Мгновенное следствие: *коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона* (структурные константы алгебры симметрических функций в базисе из многочленов Шура, $s_\mu s_\nu = \sum\limits_\lambda c_{\mu\nu}^\lambda s_\lambda$) суть целые неотрицательные числа.

2. Операция, сопряженная к умножению, и косые многочлены Шура. Для произвольной симметрической функции f определим $f^\perp$, как оператор, сопряженный к умножению на f: $\langle fu, v\rangle = \langle u, f^\perp v\rangle$.

Как всегда можно ограничиться изучением того, что происходит с базисом, многочленами Шура. Многочлен $s_{\lambda/\mu} = s_\mu^\perp s_\lambda$ (т. е. такой многочлен, что $\langle s_{\lambda/\mu}, s_\nu\rangle = \langle s_\lambda, s_\mu s_\nu\rangle$) называется *косым многочленом Шура*.

Можно понять и представленческий смысл этих многочленов: так как умножению сопряжено (справа) взятие гомоморфизмов, а индуцированию (тоже справа) — ограничение,

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{ch}(U)s_\mu, s_\lambda\rangle &= \dim \operatorname{Hom}_{S_n}(\operatorname{Ind}(U \boxtimes V^\mu), V^\lambda) = \dim \operatorname{Hom}_{S_n \times S_{n-m}}(U \boxtimes V^\mu, V^\lambda) = \\ &= \dim \operatorname{Hom}_{S_{n-m}}(U, \operatorname{Hom}_{S_m}(V^\mu, V^\lambda)) = \langle \operatorname{ch}(U), \operatorname{ch} \operatorname{Hom}_{S_m}(V^\mu, V^\lambda)\rangle,\end{aligned}$$

т. е. $s_{\lambda/\mu}$ является образом при отображении Фробениуса пространства $\operatorname{Hom}_{S_{|\mu|}}(V^\mu, V^\lambda)$ (рассматриваемого как представление $S_{|\lambda|-|\mu|}$).

Теорема. $s_\lambda(x, y) = \sum\limits_\mu s_\mu(x) s_{\lambda/\mu}(y)$.

В качестве рекламы представленческого подхода приведем два разных доказательства.
Доказательство 1. Из произведения Коши

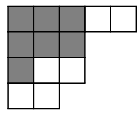
$$\sum_\lambda s_\lambda(x,y)s_\lambda(z) = \prod_{i,j}\frac{1}{1-x_iz_j}\prod_{i,j}\frac{1}{1-y_iz_j} = \sum_{\mu,\nu} s_\mu(x)s_\mu(z)s_\nu(y)s_\nu(z),$$

что равно

$$\sum_{\lambda,\mu,\nu} s_\mu(x)s_\nu(y)s_\lambda(z)\langle s_\lambda, s_\mu s_\nu\rangle = \sum_{\lambda,\mu,\nu} s_\mu(x)s_\nu(y)s_\lambda(z)\langle s_{\lambda/\mu}, s_\nu\rangle = \sum_{\mu,\lambda} s_\mu(x)s_{\lambda/\mu}(y)s_\lambda(z).$$

Приравнивая коэффициенты при $s_\lambda(z)$, получаем утверждение теоремы. □
Доказательство 2. $V^\lambda \cong V^\mu \boxtimes \operatorname{Hom}(V^\mu, V^\lambda)$ как $S_m \times S_n$-представление. □

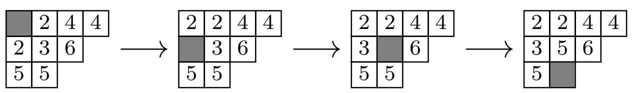
В силу линейности отсюда следует, что вообще для любой симметрической функции f имеет место равенство $f(x,y) = \sum_{\mu\subset\lambda} s_\mu(x)\cdot(s_\mu^\perp f)(y)$ — что проясняет смысл операции $(-)^\perp$.



С другой стороны, из этой теоремы сразу следует комбинаторная интерпретация косых многочленов Шура. *Косой диаграммой Юнга* формы $\lambda - \mu$ называется результат выкидывания из диаграммы λ всех клеток, принадлежащих ее поддиаграмме μ.
Предложение. $s_{\lambda/\mu}(x) = \sum x^T$, где сумма берется по всем полустандартным таблицам формы $\lambda - \mu$. (Действительно, $s_\lambda(x,y)$ — это сумма по полустандартным таблицам; их можно сгруппировать по тому, какую диаграмму образуют все номера, соответствующие переменным x...)

3. Умножение многочленов Шура и игра в 15. Как мы уже видели при доказательстве теоремы, $\langle s_{\lambda/\mu}, s_\nu\rangle = \langle s_\lambda, s_\mu s_\nu\rangle = c^\lambda_{\mu\nu}$, т. е. $s_{\lambda/\mu} = \sum c^\lambda_{\mu\nu}s_\nu$. Так что чтобы научиться перемножать многочлены Шура, достаточно научиться разлагать косые многочлены Шура по базису из обычных.

Существует абсолютно каноническая процедура *выпрямления* косой полустандартной таблицы (без изменения веса). Эта процедура (“jeu de taquin”) является вариацией на тему игры в 15: на каждом шаге нужно выбрать любую из угловых дырок и посмотреть на ее соседей справа и снизу — кто из них меньше, того и двигаем на место дырки; если они равны — двигаем нижнего (тогда как раз сохраняется полустандартность — и в итоге косая таблица превращается в настоящую).



Теорема. i. Результат выпрямления не зависит от последовательности выбора углов.
ii. Количество таблиц формы λ/μ с данным выпрямлением T зависит только от формы ν таблицы T — и, как следствие, совпадает с коэффициентом Литтлвуда– Ричардсона $c^\lambda_{\mu\nu}$.

Можно теперь сказать про умножение и по-другому: возьмем косую таблицу, являющуюся несвязным объединением таблиц формы μ и ν и будем ее выпрямлять. Если подсчитать, сколько при этом раз встретилась (какая-то фиксированная) таблица T формы λ, снова получится $c^\lambda_{\mu\nu}$.

Это равенство, «$\mathrm{Rect}(\mu*\nu,\lambda) = \mathrm{Rect}(\lambda/\mu,\nu)$», можно рассматривать как комбинаторную форму утверждения, уже знакомого нам в алгебраической и представленческой формах.