1 Вводная лекция

2 Классическая струна Полякова

3 Основные идеи квантовой теории струн

4 Действие классической струны и амплитуды

5 Каноническое квантование и струнный спектр

6 Континуальный интеграл Фейнмана-Полякова

7 Мера в интеграле по геометриям

8 Аномалия в континуальном интеграле

9 Двумерная конформная теория поля

10 Вычисление конформной аномалии

10.1 Операторная алгебра

В произвольной квантовой теории поля - гипотеза о том, что в пространстве всех "разумных" операторов существует операторное умножение

$$A_i(x)A_j(y) = \sum_k C_{ij}^k(x-y)A_k(y) \tag{10.1}$$

т.е. произведение любых двух операторов в разных точках можно разложить в линейную комбинацию по операторам в одной из них с коэффициентами, вообще говоря сингулярными при $x \to y$. Операторное равенство (10.1) понимается как равенство верное, будучи вставленным в *любую* корреляционную функцию

$$\begin{gathered}\langle A_i(x)A_j(y)A_{k_1}(z_1)\dots A_{k_n}(z_n)\rangle = \sum_k C_{ij}^k(x-y)\langle A_k(y)A_{k_1}(z_1)\dots A_{k_n}(z_n)\rangle \\ \langle A_{k_1}(z_1)\dots A_{k_n}(z_n)\rangle = \frac{\int D\phi e^{-S}A_{k_1}(z_1)\dots A_{k_n}(z_n)}{\int D\phi e^{-S}}\end{gathered} \tag{10.2}$$

а константы $\{C_{ij}^k(x)\}$ могут зависеть от чего угодно кроме, но они универсальны для любой корреляционной функции.

В абстрактной квантовой теории ничего больше сказать нельзя, кроме того, что (10.2) в принципе выражает любые корреляционный функции через структурные константы $\{C_{ij}^k(x)\}$ и средние от операторов $\langle A_k(z)\rangle$. Однако в теории с большой группой симметрии (например - конформной), на этии функции налагаются дополнительные условия, следующие из преобразований симметрии: скажем, в конформной теории поля все двух- и трехточечные функции $\langle A_{k_1}(z_1)\dots A_{k_n}(z_n)\rangle$ при $n=2,3$ определяются с помощью симметрии с точностью до константы. Кроме того, для ответов на многие вопросы важно знать лишь сингулярные части функций $\{C_{ij}^k(x)\}$.

В свободной теории операторные разложения можно вычислять с помошью *теоремы Вика*, которая следует из того, что любая многоточечная корреляционная функция фундаментальных полей выражается через произведения парных корреляторов (свойство гауссова интеграла). Вследствие этого операторное разложение любых составных операторов выражается с помощью "спаривания" их элементарных составляющих, т.е. все коэффициенты $\{C_{ij}^k(x)\}$ выражаются через парные корреляторы фундаментальных полей.

10.2 Операторное разложение: свободное скалярного поля

Посмотрим еще раз на операторное произведение токов $J(z)=i\partial X(z)$

$$\begin{aligned} J(z)J(z') \underset{z\to z'}{=} & \frac{1}{(z-z')^2} + :J(z')^2: + (z-z'):\partial J(z')J(z'): + \dots = \\ & = \frac{1}{(z-z')^2} + 2T(z') + O(z-z') \end{aligned} \tag{10.3}$$

Первый член этого разложения $\langle J(z)J(z')\rangle = \frac{1}{(z-z')^2}$ сингулярен при $z\to z'$, второй - оператор тензора энергии-импульса в точке z', остальные исчезают при совпадении точек.

Сингулярность в операторном разложении связана с некоммутативностью операторов

$$\begin{aligned} [\alpha_n,\alpha_m] &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0'} dz' z'^m \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z'}} dz z^n J(z)J(z') = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0'} dz' z'^m \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z'}} dz z^n \left(\frac{1}{(z-z')^2}+\dots\right) \end{aligned} \tag{10.4}$$

где все несингулярные члены можно выкинуть, так как они не дают вклада в интеграл. Вычисляя контурные интегралы, окончательно получим

$$[\alpha_n,\alpha_m] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0'} dz' z'^m \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z'}} dz \frac{z^n}{(z-z')^2} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0'} dz' z'^m\ n z'^{n-1} = n\delta_{n+m,0} \tag{10.5}$$

т.е. канонические коммутационные соотношения осцилляторов разложения скалярного поля.

Обратим внимание теперь на оператор

$$T(z) = \tfrac{1}{2} : J(z)^2 := -\tfrac{1}{2} : \partial X(z)^2 : \tag{10.6}$$

голоморфной компоненты тензора энергии-импульса. Рассмотрим его операторное разложение с током $J(z)$. Удобно ввести понятия спаривания

$$\begin{aligned} \underbrace{J(z)J(z')} &= \langle J(z)J(z')\rangle = \frac{1}{(z-z')^2} \\ J(z)J(z') &=: J(z)J(z') : + \underbrace{J(z)J(z')} \end{aligned} \tag{10.7}$$

тогда

$$\begin{aligned} T(z)J(z') &= \tfrac{1}{2} : J(z)^2 : \ J(z') = 2 \cdot \tfrac{1}{2} J(z) \underbrace{J(z)J(z')} + \tfrac{1}{2} : J(z)^2 \ J(z') := \\ &= \frac{J(z)}{(z-z')^2} + \tfrac{1}{2} : J(z')^3 : + O(z-z') = \frac{J(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial J(z')}{z-z'} + \dots \end{aligned} \tag{10.8}$$

где мы опустили все несингулярные при $z \to z'$ вклады. Отсюда следует, что при бесконечно-малом координатном преобразовании $z \to z + \epsilon(z)$

$$\delta_\epsilon J(z) = \oint_{z \curvearrowleft w} \frac{dw}{2\pi i} \epsilon(w) T(w) J(z) = \epsilon'(z) J(z) + \epsilon(z) J'(z) \tag{10.9}$$

т.е. ток преобразуется при голоморфных заменах координат как поле единичной размерности, т.е. инвариантом является $J(z)dz$, а генератором преобразования - ровно в указанном выше смысле - тензор энергии-импульса. Для (примарного) поля с произвольными размерностями $(\Delta, \bar{\Delta})$ аналогичный закон преобразования следует из операторных разложений

$$\begin{aligned} T(z)\Phi(z', \bar{z}') &= \frac{\Delta}{(z-z')^2} \Phi(z', \bar{z}') + \frac{1}{z-z'} \partial \Phi(z', \bar{z}') + \dots \\ \bar{T}(\bar{z})\Phi(z', \bar{z}') &= \frac{\bar{\Delta}}{(\bar{z}-\bar{z}')^2} \Phi(z', \bar{z}') + \frac{1}{\bar{z}-\bar{z}'} \bar{\partial} \Phi(z', \bar{z}') + \dots \end{aligned} \tag{10.10}$$

с генераторами голоморфной и антиголоморфной конформной симметрий. Отсюда прямой подстановкой получаем, например, для голоморфного сектора

$$\delta_\epsilon \Phi(z, \bar{z}) = \oint_{z \curvearrowleft w} \frac{dw}{2\pi i} \epsilon(w) T(w) \Phi(z, \bar{z}) = \Delta \epsilon'(z) \Phi(z, \bar{z}) + \epsilon(z) \partial \Phi(z, \bar{z}) \tag{10.11}$$

что естественным образом отвечает инвариантности при голоморфных заменах координат величин $\Phi(z, \bar{z}) dz^\Delta d\bar{z}^{\bar{\Delta}}$. В квантовой теории (аномальные!) размерности $(\Delta, \bar{\Delta})$ не обязаны

быть целыми, и задача двумерной конформной теории - вычислить эти размерности из свойств представлений алгебры Вирасоро.

В теории свободного скалярного поля примарными полями являются

$$V_\alpha(z,\bar z) =: \exp(i\alpha X(z,\bar z)) : \tag{10.12}$$

конформные размерности $\Delta_\alpha = \bar\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha^2 = \Delta_{-\alpha} = \bar\Delta_{-\alpha}$ которых проще всего определить из двухточечной корреляционной функции

$$\begin{aligned}\langle V_\alpha(z,\bar z)V_{-\alpha}(z',\bar z')\rangle &= \exp\left(\alpha^2\langle X(z,\bar z)X(z',\bar z')\rangle\right) = \\ &= \exp\left(-\alpha^2\log|z-z'|^2\right) = \frac{1}{(z-z')^{\alpha^2}(\bar z-\bar z')^{\alpha^2}}\end{aligned} \tag{10.13}$$

но, естественно, можно вычислить и из операторного разложения.

Наконец, преобразование при голоморфных заменах координат

$$\delta_\epsilon T(z) = 2\epsilon'(z)T(z) + \epsilon(z)\partial T(z) + \frac{c}{12}\epsilon'''(z) \tag{10.14}$$

самого тензора энергии-импульса $T(z)$ следовало бы из операторного разложения

$$T(z)T(z') = \frac{c}{2(z-z')^4} + \frac{2T(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial T(z')}{z-z'} + \dots \tag{10.15}$$

Действительно

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon T(z) &= \oint_{z\curvearrowleft w}\frac{dw}{2\pi i}\epsilon(w)T(w)T(z) = \\ &= \oint_{z\curvearrowleft w}\frac{dw}{2\pi i}\epsilon(w)\left(\frac{c}{2(w-z)^4} + \frac{2T(z)}{(w-z)^2} + \frac{\partial T(z)}{w-z} + \dots\right) = \\ &= \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{6}\epsilon'''(z) + 2\epsilon'(z)T(z) + \epsilon(z)\partial T(z)\end{aligned} \tag{10.16}$$

т.е. - по сравнению с примарным полем - лишний полюс 4-го порядка дает аномальный вклад в закон преобразования тензора. Проверим, наконец, формулу (10.15) для теории скалярного поля, где получим

$$\begin{aligned}T(z)T(z') &= \tfrac{1}{2} : J(z)^2 : \tfrac{1}{2} : J(z')^2 := \\ &= \tfrac{1}{2}\underbrace{J(z)\underbrace{J(z)J(z')}J(z')} + : J(z)\underbrace{J(z)J(z')}J(z') : + \frac{1}{4} : J(z)^2J(z')^2 := \\ &= \tfrac{1}{2}\langle J(z)J(z')\rangle^2 + \langle J(z)J(z')\rangle : J(z)J(z') : + \dots = \\ &= \frac{1}{2(z-z')^4} + \frac{: J(z')^2 :}{(z-z')^2} + \frac{: J(z')\partial J(z') :}{z-z'} + \dots = \\ &= \frac{1}{2(z-z')^4} + \frac{2T(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial T(z')}{z-z'} + \dots\end{aligned} \tag{10.17}$$

т.е. операторное разложение имеет действительно вид (10.15), и для скалярного поля центральный заряд алгебры Вирасоро $c = 1$.

10.3 Конформная bc-система

Рассмотрим теперь двумерную конформную свободную теорию грассмановых bc-полей спинов $(j, 0)$ и $(1-j, 0)$ для полей c и b соответственно с действием первого порядка

$$S = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} d^2\sigma \; b\bar{\partial} c \tag{10.18}$$

и будем считать поля нормированными так, чтобы их корреляционная функция была

$$\langle b(z)c(z')\rangle = \frac{1}{z-z'} \tag{10.19}$$

Как и в случае свободного скалярного поля введем нормальное произведение

$$: b(z)c(z') := b(z)c(z') - \langle b(z)c(z')\rangle = b(z)c(z') - \frac{1}{z-z'} \tag{10.20}$$

которое уже несингулярно при $z \to z'$.

Тензор энергии-импульса можно строить разными способами. Мы воспользуемся тем, что голоморфная компонента $\bar{\partial} T_{bc} = 0$ веса 2 может содержать только два слагаемых

$$T_{bc} = \alpha : b\partial c : + \beta : c\partial b : \tag{10.21}$$

и должен воспроизводить операторные разложения

$$\begin{aligned} T(z)c(w) &= \frac{j}{(z-w)^2} c(w) + \frac{1}{z-w} \partial c(w) + \ldots \\ T(z)b(w) &= \frac{1-j}{(z-w)^2} b(w) + \frac{1}{z-w} \partial b(w) + \ldots \end{aligned} \tag{10.22}$$

говорящие о том, что духовые поля c и b являются примарными полями с весами j и $(1-j)$ соответственно. Вычислим, например, первое операторное разложение

$$\begin{aligned} T(z)c(w) &= \alpha : b(z)\partial c(z) : c(w) + \beta : c(z)\partial b(z) : c(w) = \\ &= -\alpha \frac{1}{z-w} \partial c(z) - \beta \frac{1}{(z-w)^2} c(z) + \ldots = \\ &= -\beta \frac{1}{(z-w)^2} c(w) - \frac{\alpha+\beta}{z-w} \partial c(w) + \ldots \end{aligned} \tag{10.23}$$

откуда следует $\beta = -j$, $\alpha + \beta = -1$ или

$$T = (j-1) : b\partial c : -j : c\partial b : \tag{10.24}$$

Нетрудно убедиться, что второе из соотношений (10.22) при этом удовлетворяется автоматически.

10.4 Центральный заряд bc-системы

В данный момент основной для нас интерес представляет вопрос о центральном заряде. Для грассмановой bc-системы его следует искать как самый сингулярный член в операторном разложении

$$\begin{gathered} T(z)T(w) = (j-1)^2 : b(z)\partial c(z) :: b(w)\partial c(w) : + j^2 : c(z)\partial b(z) :: c(w)\partial b(w) : - \\ -j(j-1) : b(z)\partial c(z) :: c(w)\partial b(w) : -j(j-1) : c(z)\partial b(z) :: b(w)\partial c(w) : \end{gathered} \tag{10.25}$$

Самый сингулярный член сводится к произведению попарных корреляционных функций. С учетом антикоммутативности полей получаем

$$\begin{gathered} T(z)T(w) = -(j-1)^2\langle b(z)\partial c(w)\rangle\langle b(w)\partial c(z)\rangle - j^2 : \langle\partial b(z)c(w)\rangle\langle\partial b(w)c(z)\rangle - \\ -j(j-1)\langle b(z)c(w)\rangle\langle\partial b(w)\partial c(z)\rangle - j(j-1)\langle b(w)c(z)\rangle\langle\partial b(z)\partial c(w)\rangle + \ldots = \\ = -(j-1)^2\frac{1}{(z-w)^2}\frac{1}{(w-z)^2} - j^2\frac{-1}{(z-w)^2}\frac{-1}{(w-z)^2} - \\ -j(j-1)\frac{1}{z-w}\frac{-2}{(w-z)^3} - j(j-1)\frac{1}{w-z}\frac{-2}{(z-w)^3} + \ldots = \\ = -\frac{1}{(z-w)^4}\left((j-1)^2 + j^2 + 4j(j-1)\right) + \ldots = -\frac{1}{(z-w)^4}\left(6j^2 - 6j + 1\right) + \ldots \end{gathered} \tag{10.26}$$

откуда следует, что центральный заряд грассмановой bc-системы

$$c_{bc} = -2\left(6j^2 - 6j + 1\right) \tag{10.27}$$

Эта ровно та формула, которая необходима для вычисления конформной аномалии, наряду с уже вычисленным центральным зарядом скалярного поля $c = 1$.

10.5 Конформная аномалия в бозонной струне

Вернемся к континуальному интегралу в бозонной струне

$$\begin{gathered} \int DgDXe^{-S} = \int \frac{D\bar{\varepsilon}D\varepsilon}{\mathcal{V}} \int D\varphi \cdot J \int DXe^{-\frac{1}{2}(X,\Delta_0 X)} = \\ = \int D\varphi \det\Delta_{-1} \left(\det\Delta_0\right)^{-D/2} \end{gathered} \tag{10.28}$$

где мы уже выбрали конформную калибровку $ds^2 = \rho(z,\bar{z})dzd\bar{z} = e^{\varphi(z,\bar{z})}dzd\bar{z}$, в которой мера определяется отношением детерминантов

$$\frac{\det\Delta_{-1}}{\left(\det\Delta_0\right)^{D/2}} = \frac{\det\left(-\rho^{-2}\partial\rho\bar{\partial}\right)}{\det\left(-\rho^{-1}\partial\bar{\partial}\right)^{D/2}} = e^{\int_\Sigma\left(b\bar{\partial}c + c.c - \frac{1}{2}\partial X\partial X\right)} \tag{10.29}$$

и мы выяснили, что

$$-\frac{g^{\alpha\beta}}{T\sqrt{g}}\frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}}\log\frac{\det\Delta_{-1}}{(\det\Delta_0)^{D/2}} = g^{\alpha\beta}\langle T^{(bc)}_{\alpha\beta} + T^{(X)}_{\alpha\beta}\rangle = \frac{c_{bc}+D}{6}R + \mu^2_{\text{ren}} \tag{10.30}$$

В конформной калибровке это равенство принимает вид

$$\frac{\delta}{\delta\varphi}\log\frac{\det\Delta_{-1}}{(\det\Delta_0)^{D/2}} = -\frac{c_{bc}+D}{24\pi}\,\bar\partial\partial\varphi + \mu^2 e^{\varphi} \tag{10.31}$$

то есть мера в интеграле для бозонной струны сводится к

$$\begin{aligned}\int DgDXe^{-S} &= \int D\varphi\exp\left(\int_\Sigma d^2\sigma\left(-\frac{c_{bc}+D}{24\pi}\varphi\bar\partial\partial\varphi + \mu^2_{\text{ren}}e^{\varphi}\right)\right) = \\ &= \int D\varphi\exp\left(-\frac{26-D}{48\pi}\int_\Sigma d^2\sigma\left(\tfrac{1}{2}\partial_\alpha\varphi\partial_\alpha\varphi + \mu^2 e^{\varphi}\right)\right)\end{aligned} \tag{10.32}$$

где мы использовали (10.27)

$$c_{bc} = -\,2\left(6j^2 - 6j + 1\right)\big|_{j=-1} = -26 \tag{10.33}$$

при $j = -1$. Таким образом

- При $D = 26$ конформная аномалия в бозонной струне сокращается, в силу того, что центральный заряд bc-системы, отвечающей репараметризациям вычисляется по формуле (10.33). Для фермионной струны или суперструны похожее рассуждение $c_X + c_\Psi + c_{bc} + c_{\beta\gamma} = D + \frac{D}{2} - 26 + 11 = 0$ приводит к критической размерности $D = 10$.

- В некритической размерности вейлевская мода “оживает”, и описывается квантовой теорией с действием Лиувилля

$$S = \frac{26-D}{48\pi}\int_\Sigma d^2\sigma\left(\tfrac{1}{2}\partial_\alpha\varphi\partial_\alpha\varphi + \mu^2 e^{\varphi}\right) \tag{10.34}$$

  и нелинейной мерой, которая строится по норме $\|\delta\varphi\|^2 = \int_\Sigma d^2\sigma e^{\varphi}(\delta\varphi)^2$. Теория Лиувилля является примером двумерной конформной теории “общего вида”, с более или менее произвольным центральным зарядом $c_L = 26 - D$, и ее изучение является важнейшей задачей современной науки.