Анзац Бете в квантовых интегрируемых системах 2013

Общие правила сдачи зачета

Общий балл, полученный на зачете, набирается из следующих источников:

1. Дается по 0.5 балла за каждую посещенную лекцию (включая сам зачет);
2. До 1.5 балла за изложение теоретического вопроса по выбору из списка или любого другого относящегося к предмету вопроса, не вошедшего в список (лучше заранее согласовать с преподавателем);
3. Остальные баллы набираются решением задач из списка в письменном виде; можно присылать решения по e-mail заранее, что не отменяет взможного их обсуждения на зачете.

Нецелое количество баллов в общей сумме округляется в большую сторону.

Вопросы к зачету

1. Модель магнетика Гейзенберга, ее разновидности. Гамильтонианы XXX и XXZ моделей, пространство состояний, оператор полного спина, простейшие интегралы движения.
2. Волновая функция Бете на примере XXX модели Гейзенберга с периодическими граничными условиями. Бетевские состояния, их импульс и энергия. Уравнения Бете.
3. Волновая функция Бете на примере модели бозе-газа с точечным парным взаимодействием и периодическими граничными условиями. Бетевские состояния, их импульс и энергия. Уравнения Бете.
4. Решение уравнений Бете в термодинамическом пределе для основного состояния на примере антиферромагнитной XXX модели Гейзенберга или модели бозе-газа с точечным парным взаимодействием и периодическими граничными условиями.
5. Элементарные возбужденные состояния в термодинамическом пределе модели бозе-газа с точечным парным взаимодействием и периодическими граничными условиями; их описание с помощью решения уравнений Бете, сведение к интегральному уравнению.
6. 6-вершинная модель на квадратной решетке. Понятие трансфер-матрицы. Нахождение коммутирующего семейства трансфер-матриц. Тригонометрическая (гиперболическая) параметризация больцмановских весов.
7. Связь 6-вершинной модели статистической механики и квантовой XXZ модели магнетика. Производящая функция коммутирующих интегралов движения в магнетике.

8. Основные понятия квантового метода обратной задачи: квантовая матрица монодромии, трансфер-матрица, R-матрица, уравнение Янга-Бакстера, сплетающее соотношение для квантовых матриц монодромии.

9. Алгебраический анзац Бете на примере 6-вершинной модели.

Задачи к зачету

1. (0.5 балла) Найти спектр гамильтониана XYZ-модели Гейзенберга для $N = 2$:

$$H = J_x \sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + J_y \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} + J_z \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)}$$

Отдельно рассмотреть случай изотропной XXX-модели ($J_x = J_y = J_z = J$) и сравнить с решением, полученным методом Бете.

2. (1 балл) Рассмотрим XXX-модель на N узлах с периодическими граничными условиями:

$$H^{\text{xxx}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(\vec{\sigma}^{(k)} \vec{\sigma}^{(k+1)} - 1 \right), \qquad \vec{\sigma}^{(N+1)} \equiv \vec{\sigma}^{(1)}$$

Обозначим через $\vec{S}$ оператор полного спина: $\vec{S} = \sum_j \vec{\sigma}^{(j)}$. Пусть $|\Psi_m\rangle$ – бетевские состояния с m магнонами (т.е. $S_z |\Psi_m\rangle = (N - m) |\Psi_m\rangle$). Доказать, что $S_+ |\Psi_m\rangle = 0$ при $m = 1, 2$, где $|\Psi_m\rangle$ – бетевские состояния с m магнонами (такие, что бетевские корни $\lambda_i < \infty$).

3. (1 балл) Рассмотрим XXX-модель на N узлах с периодическими граничными условиями:

$$H^{\text{xxx}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(\vec{\sigma}^{(k)} \vec{\sigma}^{(k+1)} - 1 \right), \qquad \vec{\sigma}^{(N+1)} \equiv \vec{\sigma}^{(1)}$$

В секторе с тремя перевернутыми спинами найти общие собственные состояния гамильтониана и оператора циклического сдвига и вывести систему уравнений Бете.

4. (1 балл) Найти спектр гамильтониана XXX-модели на 3 узлах с периодическими граничными условиями:

$$H^{\text{xxx}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \left(\vec{\sigma}^{(k)} \vec{\sigma}^{(k+1)} - 1 \right), \qquad \vec{\sigma}^{(4)} \equiv \vec{\sigma}^{(1)}$$

Определить также кратность вырождения уровней.

5. (1.5 балла) Найти возможно большее количество собственных значений гамильтониана XXX-модели на 4 узлах с периодическими граничными условиями:

$$H^{\text{xxx}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{4} \left(\vec{\sigma}^{(k)} \vec{\sigma}^{(k+1)} - 1 \right), \qquad \vec{\sigma}^{(5)} \equiv \vec{\sigma}^{(1)}$$

(желательно найти все). Определить также кратность вырождения уровней.

6. (1 балл) Рассмотрим ферромагнитную XXX-модель на цепочке бесконечной длины:

$$H^{\mathrm{xxx}} = -\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\vec{\sigma}^{(k)}\vec{\sigma}^{(k+1)} - 1\right)$$

Доказать, что энергия связанного состояния двух магнонов $E(u+\frac{i}{2}, u-\frac{i}{2})$ всегда меньше, чем энергия двух магнонов с импульсами p_1 и p_2 такими, что $p_1 + p_2 = p(u+\frac{i}{2}, u-\frac{i}{2}) = p(u/2)$.

7. (0.5 балла) Найти функцию Янга для XXX и XXZ-моделей.

8. (1 балл) Найти собственные состояния и спектр энергий одной и двух бозе-частиц с гамильтонианом

$$\hat{H}_N = -\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + 2c\sum_{1\le j<k\le N}\delta(x_j - x_k) \qquad (N=1,2)$$

на отрезке $[0, L]$ с непроницаемыми стенками (последнее означает, что волновая функция обращается в 0, если хотя бы одна из частиц находится на краю отрезка).

9. (1 балл) Для системы трех тождественных бозе-частиц с гамильтонианом

$$\hat{H}_3 = -\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + 2c\sum_{1\le j<k\le 3}\delta(x_j - x_k)$$

найти общие собственные состояния гамильтониана и оператора полного импульса $\hat{P} = -i\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}$, наложить периодические граничные условия на отрезке $[0, L]$ и получить систему уравнений Бете.

10. (0.5 балла) Рассмотрим прологарифмированные уравнения Бете для модели бозе-газа из N частиц на отрезке $[0, L]$ с периодическими граничными условиями:

$$L\lambda_j + 2\sum_{k=1}^{N}\operatorname{arctg}\frac{\lambda_j - \lambda_k}{c} = 2\pi n_j$$

Доказать, что в состоянии, которое характеризуется целыми или полуцелыми числами n_j, полный импульс системы частиц равен $P = \frac{2\pi}{L}\sum_{j=1}^{N} n_j$.

11. (0.5 балла) Доказать, что вектор $|++ + \ldots +\rangle$ собственный для трансфер-матрицы 6-вершинной модели и найти соответствующее собственное значение.

12. (0.5 балла) Доказать, что трансфер-матрица 6-вершинной модели коммутирует с оператором циклического сдвига и оператором $S_z = \sum_j \sigma_z^{(j)}$.

13. (1 балл) Рассмотрим 6-вершинную модель на квадратной $N \times N$ решетке с R-матрицей

$$\mathsf{R} = \mathsf{R}(u) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

где $a = \sinh(u + \eta)$, $b = \sinh u$, $c = \sinh \eta$ и квантовой матрицей монодромии

$$\mathcal{T}(u) = \mathsf{R}_{10}(u)\mathsf{R}_{20}(u) \dots \mathsf{R}_{N0}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}.$$

Найти скалярное произведение

$$\langle \Omega | \, C(v) B(u) \, | \Omega \rangle$$

Рассмотреть также предел $v \to u$ (квадрат нормы вектора $B(u) \, | \Omega \rangle$). Здесь $| \Omega \rangle = | + + + \dots + \rangle$ – порождающий вектор.