1 Вводная лекция

2 Классическая струна Полякова

3 Основные идеи квантовой теории струн

4 Действие классической струны и амплитуды

5 Каноническое квантование и струнный спектр

6 Континуальный интеграл Фейнмана-Полякова

7 Мера в интеграле по геометриям

8 Аномалия в континуальном интеграле

9 Двумерная конформная теория поля

10 Вычисление конформной аномалии

11 Струнная теория возмущений

Вернемся, наконец, к формуле

$$\mathcal{F} = \sum_{p\geq 0} g_{\rm str}^{2p-2} \int_{\Sigma_p} DgDX \exp(-S[X,g]) \tag{11.1}$$

в которой сумма по "связным диаграммам" - т.е. по мировым листам всех топологий определяет *свободную энергию* бозонной струны. Для главного вклада

$$\mathcal{F}_0 = \int_{\Sigma_0} DgDX \exp(-S[X,g]) \tag{11.2}$$

отвечающего поверхностям рода $p = 0$ мы выяснили, что основная нетривиальность связана с конформной аномалией, которая сокращается для бозонной струны только при

$D = 26$. Поскольку аномалия локальна на мировом листе, т.е.

$$g^{\alpha\beta}\langle T_{\alpha\beta}(P)\rangle = \frac{c}{6}R(P), \quad \forall P \in \Sigma \tag{11.3}$$

то это условие не зависит от рода, и будет выполняться одинаково для всех p в сумме (11.1). Тем не менее, для всех вкладов кроме главного

$$\mathcal{F}_p = \int_{\Sigma_p} DgDX \exp(-S[X,g]), \qquad p > 0 \tag{11.4}$$

в струнной мере возникает еще конечномерный интеграл, аналогичный интегралу по длинам траекторий для релятивистской частицы.

11.1 Мировые листы рода $p = 1$

Для того, чтобы вычислить однопетлевую поправку, нужно понять как устроены метрики на римановых поверхностях рода $p = 1$. Метрики конформного вида не выходят из этого класса при голоморфных заменах координат, поэтому нужно описать всевозможные комплексные структуры на двумерных торах.

Хорошо известно, что конформная метрика на двумерном вещественном торе с координатами $0 \leq \sigma_{1,2} \leq 1$ всегда может быть записана в виде

$$ds^2 = e^{\varphi(\sigma_1,\sigma_2)}\left|d\sigma_1 + \tau d\sigma_2\right|^2 = e^{\varphi(z,\bar{z})}dzd\bar{z} \tag{11.5}$$

где τ - единственный комплексный параметр, $\mathrm{Im}\tau > 0$, что отвечает одномерному комплексному тору, представляемому как фактор комплексной плоскости по решетке $\Sigma = \mathbb{C}/\Gamma$, натянутой на два вектора $(1,\tau)$ в комплексной плоскости: $\Gamma = \{1\cdot\mathbb{Z}\oplus\tau\cdot\mathbb{Z}\}$. Очевидно, что комплексные координаты $(z,\bar{z}) = (\sigma_1+\tau\sigma_2, \sigma_1+\bar{\tau}\sigma_2)$ и $(z',\bar{z}') = (\sigma_1+\tau'\sigma_2, \sigma_1+\bar{\tau}'\sigma_2)$ при $\tau \neq \tau'$ не могут быть связаны друг с другом голоморфной заменой.

Несколько замечаний:

- Тор с параметром (модулем комплексной структуры) $\tau = \mathrm{Re}\tau + i\mathrm{Im}\tau = \theta + iT$ естественно представлять как цилиндр длины T (раздутую мировую линию), склеенную после поворота или твиста на угол θ.

- Вообще говоря, комплексная структура на торе определена с точностью до автоморфизмов решетки Γ

$$\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \tag{11.6}$$

  группа которых генерируется $T : \tau \mapsto \tau + 1$ и $S : \tau \mapsto -1/\tau$ преобразованиями.

- На комплексном торе $\Sigma = \mathbb{C}/\Gamma$ можно выбрать два нестягиваемых цикла в $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, например $A : (0 \leq \sigma_1 \leq 1, \sigma_2 = \text{fixed})$ и $B : (\sigma_1 = \text{fixed}, 0 \leq \sigma_2 \leq 1)$, у которых форма пересечений $\langle A, B \rangle = 1$. Тогда модуль комплексной структуры

$$\tau = \frac{\int_0^\tau dz}{\int_0^1 dz} = \frac{\oint_B dz}{\oint_A dz} \tag{11.7}$$

можно определить как единственный элемент матрицы периодов - отношение двух периодов голоморфного дифференциала $\bar{\partial} dz = 0$.

11.2 Мера интегрирования для струны на торе

Как и для струны на сфере меры интегрирования определяются по репараметризационно-инвариантным нормам

$$\|\delta X\|^2 = \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{g} (\delta X)^2 \tag{11.8}$$

для полей-координат и

$$\|\delta g\|^2 = \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{g} \left(g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'} \delta g_{\alpha\beta} \delta g_{\alpha'\beta'} + C (g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta})^2 \right) \tag{11.9}$$

для двумерной метрики, где теперь $\Sigma = \Sigma_1$. Но теперь вариация метрики

$$\begin{gathered} \delta g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \varepsilon_\beta + \nabla_\beta \varepsilon_\alpha + g_{\alpha\beta} \delta\varphi + \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \tau} \delta\tau + c.c. \right) = \\ = \nabla_\alpha \varepsilon_\beta + \nabla_\beta \varepsilon_\alpha - g_{\alpha\beta} \nabla^\gamma \varepsilon_\gamma + \left(\delta\varphi + \nabla^\gamma \varepsilon_\gamma + \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \tau} \delta\tau + c.c. \right) \right) g_{\alpha\beta} + \\ + (h_{\alpha\beta} \delta\tau + c.c.) = (L \cdot \varepsilon)_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \delta\tilde{\varphi} + (h_{\alpha\beta} \delta\tau + c.c.) \end{gathered} \tag{11.10}$$

включает независимое слагаемое с

$$h_{\alpha\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \tau} - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\alpha'\beta'} \frac{\partial g_{\alpha'\beta'}}{\partial \tau} \tag{11.11}$$

отвечающее вариации комплексной структуры.

Повторяя рассуждение с вычислением якобиана можно написать

$$1 = \int D(\delta g) \exp\left(-\frac{1}{8} \|\delta g\|^2 \right) = J[\rho; \tau, \bar{\tau}] \int D\bar{\varepsilon} D\varepsilon D(\delta\tilde{\varphi}) d^2(\delta\tau) \exp\left(-\frac{1}{8} \|\delta g\|^2 \right) \tag{11.12}$$

где теперь

$$\begin{gathered} \|\delta g\|^2 = \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{g} \Big(g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'} (L \cdot \varepsilon)_{\alpha\beta} (L \cdot \varepsilon)_{\alpha'\beta'} + 2(1 + 2C)(\delta\tilde{\varphi})^2 + \\ + g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'} (h_{\alpha\beta} \delta\tau + c.c.) (h_{\alpha'\beta'} \delta\tau + c.c.) \Big) \end{gathered} \tag{11.13}$$

где перекрестных членов нет из-за бесследовости и условия

$$L^\dagger \cdot h_{\alpha\beta} = 0 \tag{11.14}$$

С точки зрения оператора L, действующего из векторных полей на Σ со значением в бесследовых симметричных тензорах ранга 2, нулевые моды сопряженного оператора (ядро $L^\dagger$) можно разложить по базису дополнения к образу L, что и сказано в формуле (11.10).

Вспоминаем, что в комплексных координатах для оператора L мы имели

$$(L\cdot\varepsilon)_{zz} = 2\nabla_z\varepsilon_z = \rho\partial\bar\varepsilon, \quad (L\cdot\varepsilon)_{\bar z\bar z} = 2\nabla_{\bar z}\varepsilon_{\bar z} = \rho\bar\partial\varepsilon \tag{11.15}$$

т.е.оператор

$$L : (\Omega_{0,-1} \stackrel{\rho\partial}{\to} \Omega_{2,0}, \Omega_{-1,0} \stackrel{\rho\bar\partial}{\to} \Omega_{0,2}) \tag{11.16}$$

а сопряженный ему

$$L^\dagger : (\Omega_{2,0} \stackrel{\rho^{-2}\bar\partial}{\to} \Omega_{0,-1}, \Omega_{0,2} \stackrel{\rho^{-2}\partial}{\to} \Omega_{-1,0}) \tag{11.17}$$

Это означает, что ядро оператора $L^\dagger$

$$\ker L^\dagger : \quad \bar\partial h_{zz} = 0, \quad \partial h_{\bar z\bar z} = 0 \tag{11.18}$$

состоит из голоморфных 2-дифференциалов (и им комплексно-сопряженных), и вариации метрики, ортогональные репараметризациям имеют вид

$$\delta_\perp g_{zz} = \delta\bar\tau h_{zz}, \qquad \delta_\perp g_{\bar z\bar z} = \delta\tau h_{\bar z\bar z} \tag{11.19}$$

Начиная с этого момента будем для простоты считать струну критической - т.е. возьмем именно 26 бозонных полей координат, так чтобы конформная аномалия сократилась, и забудем пока вообще про зависимость от конформного фактора $\rho = e^\varphi$, которая легко восстанавливается из уравнения аномалии для любого из детерминантов.

Для метрики на торе (11.5) легко получить

$$\frac{\partial}{\partial\tau} ds^2 = d\sigma_2 d\bar z = \frac{dz d\bar z}{\tau-\bar\tau} - \frac{d\bar z^2}{\tau-\bar\tau} \tag{11.20}$$

то есть

$$h_{zz}(dz)^2 = \frac{dz^2}{\tau-\bar\tau}, \qquad h_{\bar z\bar z}(d\bar z)^2 = -\frac{d\bar z^2}{\tau-\bar\tau} \tag{11.21}$$

очевидно удовлетворяющие (11.18). Формула (11.13) при этом дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}\|\delta g\|^2 &= \int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{\hat g}\left(\partial\bar\varepsilon\bar\partial\varepsilon + \tfrac{1}{2}(\delta\tilde\varphi)^2 + h_{zz}h_{\bar z\bar z}|\delta\tau|^2\right) = \\ &= \int_\Sigma d^2\sigma \mathrm{Im}\tau\left(\partial\bar\varepsilon\bar\partial\varepsilon + \tfrac{1}{2}(\delta\tilde\varphi)^2\right) + \frac{|\delta\tau|^2}{4\mathrm{Im}\tau} \end{aligned} \tag{11.22}$$

11.3 Нулевые моды

Вычисляя меру на замкнутой поверхности следует, вообще говоря, помнить, что у оператора Лапласа всегда есть нулевая мода - константа. Это проявляется в том, что в норму

$$\|\delta X\|^2 = \int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{g}(\delta X)^2 = (\delta X_0)^2 \int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{g} + \int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{g}(\delta' X)^2 \tag{11.23}$$

нулевая мода явно входит, а из действия выпадает. Поэтому

$$\begin{aligned}\int D(\delta X)e^{-\frac{1}{2}\|\delta X\|^2} &= \int d(\delta X_0)e^{-\frac{1}{2}(\delta X_0)^2\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{g}} \int D(\delta' X)e^{-\frac{1}{2}\|\delta' X\|^2} = \\ &= \left(\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{g}\right)^{-D/2} \int D(\delta' X)e^{-\frac{1}{2}\|\delta' X\|^2} = 1\end{aligned} \tag{11.24}$$

а значит

$$\int DXe^{-\frac{1}{2}(X,\Delta_0 X)} = \int dX_0 \int DX' e^{-\frac{1}{2}(X',\Delta_0 X')} = \mathcal{V}_D \left(\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{g}\right)^{D/2} (\det{}'\Delta_0)^{-D/2} \tag{11.25}$$

Замечания:

- Штрих у детерминанта означает, что его следует вычислять на пространстве собственных функций с выкинутой нулевой модой;
- Объем пространства $\mathcal{V}_D = \int dX_0$ естественен (свободная энергия и должна быть пропорциональна объему) и не страшен: для амплитуд этот интеграл превращается

$$\int dX_0 \prod_j e^{ip_j X_0} = \delta^{(D)}(\sum_j p_j) \tag{11.26}$$

  в закон сохранения импульса.

Аналогичная модификация происходит и при вычислении меры интегрирования по метрикам. Для репараметризаций (в конформной метрике $\rho = \sqrt{\hat{g}} = \mathrm{Im}\tau$)

$$\begin{gathered}\|\varepsilon\|^2 = (\bar{\varepsilon}, \varepsilon) = \int_\Sigma d^2\sigma\hat{g}\bar{\varepsilon}\varepsilon \\ \int D\bar{\varepsilon}D\varepsilon e^{-\|\varepsilon\|^2} = \int d\bar{\varepsilon}_0 d\varepsilon e^{-\bar{\varepsilon}_0\varepsilon_0\int_\Sigma d^2\sigma\hat{g}} D\bar{\varepsilon}' D\varepsilon' e^{-\|\varepsilon'\|^2} = \\ = (\mathrm{Im}\tau)^{-2}\int D'\varepsilon e^{-\|\varepsilon\|^2} = 1\end{gathered} \tag{11.27}$$

поэтому

$$\int D\bar{\varepsilon}' D\varepsilon' e^{-(\bar{\varepsilon}',\Delta_{-1}\varepsilon')} = (\mathrm{Im}\tau)^2 (\det{}'\Delta_{-1})^{-1} \tag{11.28}$$

и из нормы (11.22) получаем

$$
\begin{aligned}
1 = J[\tau,\bar\tau]\int D\bar\varepsilon' D\varepsilon' D(\delta\tilde\varphi) d^2(\delta\tau)\exp\left(-\frac{1}{8}\|\delta g\|^2\right) = \\
= J[\tau,\bar\tau]\int D\bar\varepsilon' D\varepsilon' e^{-(\bar\varepsilon',\Delta_{-1}\varepsilon')}\int d^2(\delta\tau) e^{-\frac{|\delta\tau|^2}{4\mathrm{Im}\tau}} = \\
= J[\tau,\bar\tau]\left(\mathrm{Im}\tau\right)^2\left(\det{}'\Delta_{-1}\right)^{-1}\mathrm{Im}\tau
\end{aligned}
\tag{11.29}
$$

Таким образом якобиан замены

$$
J[\tau,\bar\tau] = \frac{1}{\mathrm{Im}\tau}\frac{\det{}'\Delta_{-1}}{(\mathrm{Im}\tau)^2} \tag{11.30}
$$

и мера интегрирования для критической струны на торе превращается в

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 = \int_{\Sigma_1} DgDX\exp(-S[X,g]) = \int_{\mathcal{M}_1} d^2\tau\int\frac{D\bar\varepsilon D\varepsilon}{\mathcal{V}}J[\tau,\bar\tau]\cdot\int DXe^{-\frac{1}{2}(X,\Delta_0 X)} = \\
= \mathcal{V}_D\int_{\mathcal{M}_1} d^2\tau\frac{1}{\mathrm{Im}\tau}\frac{\det{}'\Delta_{-1}}{(\mathrm{Im}\tau)^2}\cdot\left(\mathrm{Im}\tau\right)^{D/2}\left(\det{}'\Delta_0\right)^{-D/2} = \\
= \mathcal{V}_D\int_{\mathcal{M}_1}\frac{d^2\tau}{(\mathrm{Im}\tau)^2}\left(\frac{\det{}'\Delta}{\mathrm{Im}\tau}\right)^{-\frac{D-2}{2}}
\end{aligned}
\tag{11.31}
$$

Замечания:

- Мы забыли про конформную аномалию, подразумевая, что на самом деле сидим в критической размерности $D = 26$;
- В выбранной плоской метрике на торе $\hat\rho = \sqrt{\hat g}$ детерминанты операторов, действующие на поля различных спинов $\det{}'\Delta_{-1} = \det{}'\left(-\hat\rho^{-2}\partial\hat\rho\bar\partial\right) = \det{}'\Delta$ и $\det{}'\Delta_0 = \det{}'\left(-\hat\rho^{-1}\partial\bar\partial\right) = \det{}'\Delta$ совпадают;
- По какому многообразию мы интегрируем по модулярному пространству - неизвестно, поэтому пока его обозначили как $\mathcal{M}_1$.

11.4 Вычисление детерминанта

Вычислять детерминант оператора Ларласа на одномерном комплексном торе $\Sigma = \mathbb{C}/\Gamma$, (решетка Γ натянута на два вектора $(1,\tau)$ в комплексной плоскости) можно просто рассматривая оператор

$$
\Delta = -\frac{\partial}{\partial\xi_1^2} - \frac{\partial}{\partial\xi_2^2} \tag{11.32}
$$

действующий на функции

$$\Delta f(\xi_1,\xi_2)=\lambda f(\xi_1,\xi_2) \tag{11.33}$$

с периодическими граничными условиями ($\tau=\theta+iT$)

$$\begin{gathered} f(\xi_1+1,\xi_2)=f(\xi_1,\xi_2) \\ f(\xi_1+\theta,\xi_2+T)=f(\xi_1,\xi_2) \end{gathered} \tag{11.34}$$

Решается уравнение тривиально, представив $f(\xi_1,\xi_2)=e^{i\mu\xi_1+i\nu\xi_2}$, тогда $\lambda=\mu^2+\nu^2$, а сами "квазиимпульсы" μ и ν определяются из граничных условий (11.34):

$$\begin{gathered} e^{i\mu}=1, \quad e^{i\mu\theta+i\nu T}=1 \\ \mu=2\pi n, \qquad \mu\theta+\nu T=2\pi k, \qquad n,k\in\mathbb{Z} \end{gathered} \tag{11.35}$$

т.е.

$$\lambda_{n,k}=4\pi^2n^2+\frac{4\pi^2}{T^2}\left(k-\theta n\right)^2=\frac{4\pi^2}{T^2}\left|k-\tau n\right|^2 \tag{11.36}$$

Следовательно, детерминант оператора (11.33) (с выкинутой нулевой модой!) равен

$$\det{}'\Delta=\prod_{n,k}{}'\lambda_{n,k}=\prod_{n,k}{}'\frac{4\pi^2}{T^2}\left|k-\tau n\right|^2 \tag{11.37}$$

где штрих означает отсутствие члена с $n=k=0$. Постараемся упростить вычисление, с этой целью разобьем произведение

$$\begin{gathered} \det{}'\Delta=\prod_{n,k}{}'\frac{4\pi^2}{T^2}\left|k-\tau n\right|^2=\prod_{n,k}{}'\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot\left|f(\tau)\right|^2 \\ f(\tau)=\prod_{n,k}{}'(k-\tau n) \end{gathered} \tag{11.38}$$

Первый сомножитель мы уже практически вычисляли в теории частицы, без лишних деталей

$$\begin{gathered} \log\prod_{n,k}{}'\frac{4\pi^2}{T^2}=-\log T^2\sum_{n,k}{}'1+\mathrm{const}=-\log T^2\left(\sum_{n,k}1-1\right)+\mathrm{const}= \\ =\log T^2+\mathrm{const} \end{gathered} \tag{11.39}$$

так как $\sum_{k\in\mathbb{Z}}1=-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}=0$. С другой стороны

$$\begin{gathered} f(\tau)=\prod_{n,k}{}'(k-\tau n)=\prod_{k\neq0}k\cdot\prod_{n\neq0}\prod_{k}(k-\tau n)\sim\prod_{n\neq0}\sin(\pi n\tau)\sim \\ \sim\left(\prod_{n>0}e^{-i\pi n\tau}\prod_{n>0}\left(1-e^{2\pi in\tau}\right)\right)^2\sim\left(e^{i\pi\tau/12}\prod_{n>0}\left(1-e^{2\pi in\tau}\right)\right)^2=\eta(e^{2\pi i\tau})^2 \end{gathered} \tag{11.40}$$

где мы опять использовали $\sum_{n>0} n = -\frac{1}{12}$, формулу произведения для синуса

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{k>0} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \sim \prod_k (k - x) \tag{11.41}$$

и ввели функцию Дедекинда

$$\eta(q) = q^{1/24} \prod_{n>0} (1 - q^n), \qquad \eta(e^{2\pi i\tau}) \sim \theta'_*(0|\tau)^{1/3} \tag{11.42}$$

где $\theta_*(z|\tau) = \theta_{11}(z|\tau)$ единственная нечетная на торе тэта-функция Якоби. Еще раз отметим, что все вычисления проводились с точностью до конечных констант и перенормировок введением соответствующих затравочных контрчленов.

11.5 Результат для меры на торе

Таким образом

$$\det{}'\Delta \sim (\mathrm{Im}\tau)^2 \left|\eta(e^{2\pi i\tau})\right|^4 \tag{11.43}$$

и для свободной энергии на торе получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 = \int_{\Sigma_1} DgDX \exp(-S[X,g]) = \mathcal{V}_D \int_{\mathcal{M}_1} \frac{d^2\tau}{(\mathrm{Im}\tau)^2} \left(\frac{\det{}'\Delta}{\mathrm{Im}\tau}\right)^{-\frac{D-2}{2}} = \\ = \mathcal{V}_D \int_{\mathcal{M}_1} \frac{d^2\tau}{(\mathrm{Im}\tau)^2} \left(\frac{\det{}'\Delta}{\mathrm{Im}\tau}\right)^{-\frac{D-2}{2}} = \mathcal{V}_D \int_{\mathcal{M}_1} \frac{d^2\tau}{(\mathrm{Im}\tau)^{1+D/2}} \left|\eta(e^{2\pi i\tau})\right|^{-2(D-2)} = \\ \underset{D=26}{=} \mathcal{V}_{26} \int_{\mathcal{M}_1} \frac{d^2\tau}{(\mathrm{Im}\tau)^{14}} \left|\eta(e^{2\pi i\tau})\right|^{-48} \end{aligned} \tag{11.44}$$

где, конечно, необходимо вспомнить чему равна критическая размерность, в которой мы реально проводили все вычисления.

Для анализа полученного выражение следует вспомнить, что свободная энергия частицы с массой m^2, как интеграл по собственным длинам замкнутых траекторий имеет вид

$$\mathcal{F}_{m^2} = \mathcal{V}_D \int_0^\infty \frac{dT}{T^{1+D/2}} e^{-\frac{1}{2}m^2 T} \tag{11.45}$$

что очень похоже на (11.44), так как при $T = \mathrm{Im}\tau > 0$, экспонента $|e^{2\pi i\tau}| = e^{-2\pi T} < 1$, а

поэтому

$$\eta(e^{2\pi i\tau}) = e^{i\pi\tau/12}\prod_{n>0}\left(1-e^{2\pi i n\tau}\right) = e^{i\pi\tau/12}\left(1-e^{2\pi i\tau}+\ldots\right)$$
$$\left|\eta(e^{2\pi i\tau})\right|^{-48} = e^{4\pi T}\left(1+24(e^{2\pi i\tau}+e^{-2\pi i\bar\tau})+300(e^{4\pi i\tau}+e^{-4\pi i\bar\tau})+\right.$$
$$\left.+576e^{2\pi i(\tau-\bar\tau)}+\ldots\right) = e^{4\pi T}\left(1+24e^{-2\pi T}(e^{2\pi i\theta}+e^{-2\pi i\theta})+300e^{-4\pi T}(e^{4\pi i\theta}+e^{-4\pi i\theta})+\right.$$
$$\left.+576e^{-4\pi T}\right)+O(e^{-4\pi T}) \tag{11.46}$$

Подставив это разложение в (11.44), получим

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{V}_{26}\int_{\mathcal{M}_1}\frac{d^2\tau}{(\mathrm{Im}\tau)^{14}}\left|\eta(e^{2\pi i\tau})\right|^{-48} = \mathcal{V}_{26}\int_{\mathcal{M}_1}\frac{dT}{T^{14}}\int d\theta\, e^{4\pi T}\cdot$$
$$\cdot\left(1+24e^{-2\pi T}(e^{2\pi i\theta}+e^{-2\pi i\theta})+300e^{-4\pi T}(e^{4\pi i\theta}+e^{-4\pi i\theta})+576e^{-4\pi T}+\ldots\right) =$$
$$= \mathcal{V}_{26}\int d\theta\int_{\mathcal{M}_1}\frac{dT}{T^{14}}\left(e^{4\pi T}+576e^0+O(e^{-4\pi T})+\theta-\mathrm{dependent}\right) =$$
$$= \mathcal{V}_{26}\int d\theta\int_{\mathcal{M}_1}\frac{dT}{T^{14}}\left(e^{\frac{1}{2}\frac{4}{\alpha'}T}+576e^0+O(e^{-\frac{1}{2}\frac{4}{\alpha'}T})+\theta-\mathrm{dependent}\right) \tag{11.47}$$

где в последней строчке мы ввели α' (до того $2\pi\alpha'=1$). Таким образом, однопетлевая статсумма (свободная энергия) становится похожа на сумму таковых по частицам с массами $m^2 = -\frac{4}{\alpha'}, 0, \frac{4}{\alpha'}, \ldots$ т.е. - по физическому спектру замкнутой бозонной струны. Первый член - тахион с массой $m^2 = -\frac{4}{\alpha'}$, с единичными коэффициентом, т.е. он в спектре - одни-единственный, а вот безмассовых состояний с $m^2 = 0$ целых $576 = 24\cdot 24 = (D-2)\cdot(D-2)$. Действительно, в спектре замкнутой бозонной струны присутствуют (в калибровке светового конуса)

$$|0\rangle, \qquad \alpha^i_{-1}\tilde\alpha^j_{-1}|0\rangle, \quad i,j=1,\ldots,D-2=24, \qquad \ldots \tag{11.48}$$

причем вторую группу формируют $\frac{1}{2}(D-2)(D-1)-1 = 252$ гравитона в 26-мерии (дает $\frac{1}{2}(D-2)(D-1)-1 = 2$ в четырехмерии), $\frac{1}{2}(D-2)(D-3) = 231$ состояние безмассового антисимметричного тензорного поля, и - одни-единственный безмассовый скалярный дилатон.

Откуда взялось 24 вместо 26-ти? Вспомним, что мера была построена из отношения детерминантов

$$\frac{\det'\Delta_{-1}}{(\det'\Delta_0)^{D/2}} = (\det'\Delta)^{1-D/2} = (\det'\Delta)^{-\frac{D-2}{2}} = (\det'\Delta)^{-\frac{1}{2}(26-2)} \tag{11.49}$$

т.е. 26 превращается в 24 за счет частичного сокращения вкладов детерминанта Δ_0 скалярных полей детерминантом

$$\det'\Delta_{-1} \sim \left|\int DbDc\exp\frac{1}{2\pi}\int_\Sigma b\bar\partial c\right|^2 \tag{11.50}$$

т.е. - на языке конформной теории - *вкладом духов* Фейнмана-Фаддеева-Попова.

11.6 Модулярная область

Но ведь есть еще интеграл по $\mathrm{Re}\tau = \theta$ и загадочная область $\mathcal{M}_1$. Вспомним, что в квантовой теории мы должны интегрировать по всем *различным* физическим конфигурациям, а комплексная структура на торе задается параметром (модулем) τ с $\mathrm{Im}\tau > 0$ с точностью до автоморфизмов решетки, генерируемыми $T : \tau \mapsto \tau + 1$ и $S : \tau \mapsto -1/\tau$ преобразованиями.

Первое преобразования отождествляет $\theta \sim \theta + 1$, поэтому в интеграле (11.44), (11.47) можно ограничиться полосой $-\frac{1}{2} \leq \theta \leq \frac{1}{2}$, а значит

$$\begin{gathered}\mathcal{F}_1 = \mathcal{V}_{26} \int \frac{dT}{T^{14}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\theta\, e^{4\pi T} \cdot \\ \cdot \left(1 + 24e^{-2\pi T}(e^{2\pi i\theta} + e^{-2\pi i\theta}) + 300e^{-4\pi T}(e^{4\pi i\theta} + e^{-4\pi i\theta}) + 576e^{-4\pi T} + \ldots\right) = \\ = \mathcal{V}_{26} \int_{\mathcal{M}_1} \frac{dT}{T^{14}} \left(e^{4\pi T} + 576e^0 + O(e^{-4\pi T})\right)\end{gathered} \tag{11.51}$$

т.е. все зависящие от θ вклады в интегранд при интегрировании пропадают.

Другое преобразование $S : \tau \mapsto -1/\tau$ оставляет на месте окружность $|\tau| = 1$, переводя друг в друга точки из полосы по разные стороны от нее. Таким образом мы строим пространство модулей тора

$$\begin{gathered}\mathcal{M}_1 = \mathcal{T}_1/SL(2,\mathbb{Z}), \qquad \mathcal{T}_1 = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\tau > 0\} \\ \mathcal{M}_1 = \{\tau \in \mathbb{C} : -\tfrac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\tau \leq \tfrac{1}{2}, |\tau| > 1\}\end{gathered} \tag{11.52}$$

известное также как модулярная фигура.

11.7 Струны в ультрафиолете и инфракрасии

В выражении (11.45) интеграл очевидно сходится на верхнем пределе (в инфракрасии) при $m^2 > 0$, но расходится для тахиона, и при этом всегда расходится на нижнем пределе, т.е. в ультрафиолете. Что происходит в теории струн?

В бозонной струне всегда присутствует инфракрасная тахионная расходимость, но в теории суперструн, где тахион отсутствует, этой расходимости быть не должно. Что касается ультрафиолета - то эта область *в принципе* отсутствует в интеграле по пространству модулей. Поэтому иногда гоаорят, что струны ультрафиолетово конечны.

Безусловно в таком способе рассуждения присутствует лукавство. Ультрафиолетовая область отсутствует при интегрировании по пространству модулей как раз в силу модулярной инвариантности - ее учет привел бы к “двойному счету” конфигураций в интеграле

Полякова эквивалентных физически. Поэтому вклад ультрафиолета в каком-то смысле "моделируется" вкладом инфракрасия, а инфракрасная область дает расходимость в интеграл бозонной струны из-за тахиона. Это позволяет надеяться, что в самосогласованной теории струн без тахиона (суперструне) расходимостей нет.

Заметим также, что дополнительный параметр $\theta = \mathrm{Re}\tau$ можно рассматривать в интеграле на торе как результат склеивания цилиндра со скруткой или твистом. Поэтому, из интеграла на цилиндру (в котором, как и в случае частицы, область интегрирования $0 < T < \infty$) при склеивании возникает интеграл на торе, в котором ультрафиолетово-опасная область $T \to 0$ оказывается выкинутоя из-за появления дополнительной симметрии $SL(2,\mathbb{Z})$. Тем самым, петлевые поправки в теории струн плохо согласуются с наивным правилом склеивания - из квантовой теории поля, и поэтому *не существует* полевой или вторично-квантованной теории замкнутых струн.

11.8 Старшие петли

Аналогично для старших петлевых поправок можно написать

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_p = \int_{\Sigma_p} DgDX \exp(-S[X,g]) = \mathcal{V}_D \int_{\mathcal{M}_p} d\mu(\mathbf{y}) \frac{\det'\Delta_{-1}}{\det N_2} \left(\frac{\det N_0}{\det'\Delta_0}\right)^{D/2} = \\ = \mathcal{V}_{26} \int_{\mathcal{M}_p} d\mu(\mathbf{y}) \frac{\det'\Delta_{-1}}{\det N_2} \left(\frac{\det N_0}{\det'\Delta_0}\right)^{13}, \qquad p > 1\end{aligned} \tag{11.53}$$

где $(N_j)_{AB} = \int_{\Sigma_p} d^2\sigma \hat{g}(\mathbf{y})^{\frac{1-j}{2}} \bar{h}_A h_B$, а метрика на поверхности в комплексных координатах может быть (локально!) выбрана в виде $ds^2 = \hat{g}(\mathbf{y})^{1/2} dz d\bar{z}$ (сразу используем опять, что конформная аномалия сокращается).

Теорема (Риман-Рох) Для bc-системы со спинами $(j,0)$ и $(1-j,0)$ на кривой рода g

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker \bar{\partial}_j - \dim_{\mathbb{C}} \ker \bar{\partial}_{1-j} = (2j-1)(g-1) \tag{11.54}$$

Следствие: поскольку

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}} \ker \bar{\partial}_{-1} = 3, \qquad p = 0 \\ \dim_{\mathbb{C}} \ker \bar{\partial}_{-1} = 1, \qquad p = 1 \\ \dim_{\mathbb{C}} \ker \bar{\partial}_{-1} = 0, \qquad p > 1\end{aligned} \tag{11.55}$$

то при $p > 1$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_p = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{T}_p = \dim_{\mathbb{C}} \ker \bar{\partial}_2 = 3p - 3 \tag{11.56}$$

просто потому, что - как мы уже видели на торе - вариации метрики ортогональные репараметризациям имеют вид

$$\delta_\perp g_{zz} = \sum_A \delta \bar{y}_A h^{(A)}_{zz}, \qquad \left(L \cdot h^{(A)}\right)_{zz} = \bar{\partial} h^{(A)}_{zz} = 0 \tag{11.57}$$

где теперь $A = 1, \ldots, 3p-3$.

Теорема (Белавин-Книжник) Мера в бозонной струне (11.53) является мерой Мамфорда, т.е.

$$d\mu(\mathbf{y}) \frac{\det' \Delta_{-1}}{\det N_2} \left(\frac{\det N_0}{\det' \Delta_0} \right)^{13} = dv \wedge d\bar{v} \left(\det \mathrm{Im} T_{ij}(\mathbf{y}) \right)^{-13} |F(\mathbf{y})|^2 \tag{11.58}$$

где $dv = dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_{3p-3}$, $T_{ij} = \oint_{B_i} d\omega_j$ - матрица периодов Σ_p, а

$$F(\mathbf{y}) = \frac{\det \bar{\partial}_{-1}}{(\det \bar{\partial}_0)^{13}} \tag{11.59}$$

мероморфное сечение некоторого расслоения на пространстве модулей $\mathcal{M}_p$ с тахионной особенностью.

Для родов $p = 2, 3$ выполняется равенство $3p - 3 = \frac{1}{2}p(p+1)$ и в качестве координат $\mathbf{y}$ на $\mathcal{M}_p$ можно выбрать сами элементы матрицы периодов $T_{ij} = T_{ij}(\mathbf{y})$. Тогда

$$\mathcal{F}_p = \mathcal{V}_{26} \int_{\mathcal{M}_p} \prod_{i \leq j} \frac{i}{2} dT_{ij} \wedge d\bar{T}_{ij} \left(\det \mathrm{Im} T_{ij} \right)^{-13} |\chi_{12-p}(T)|^{-2}, \qquad p = 2, 3 \tag{11.60}$$

где $\chi_k(T)$ - модулярная форма

$$\chi_k(T) \mapsto \left(\det(CT + D) \right)^k \chi_k(T), \qquad T \mapsto \frac{AT + B}{CT + D} \tag{11.61}$$

Для рода $p = 1$ в формуле (11.44) у нас было

$$\chi(\tau) = \eta(e^{2\pi i \tau})^{12} \sim \theta'_*(0|\tau)^4 = \prod_{\mathbf{e}\ even} \theta_{\mathbf{e}}(0|\tau)^4 \tag{11.62}$$

Для рода $p = 2$

$$\chi_{10} \sim \prod_{\mathbf{e}\ even} \theta_{\mathbf{e}}(0|T)^2 \tag{11.63}$$

и аналогичную формулу можно написать для рода $p = 3$.