Национальный исследовательский
университет — Высшая школа экономики
Факультет математики
Рабочая программа дисциплины
“Riemann surfaces”
для совместной программы НИУ–ВШЭ и НМУ
“Math in Moscow”

1 Организационно-методический раздел

1.1 Цель курса

Изучение основ теории римановых поверхностей:

- понятий комплексного многообразия, римановой поверхности как его частного случая, голоморфной и мероморфной формы, вычета;
- основных конструкций компактных римановых поверхностей: эллиптические кривые, римановы поверхности, соответствующие алгебраическим уравнениям: глладки плоские кривые и нормализации нодальных кривых;
- понятий дивизора, класса дивизоров, линейной системы;
- задачи Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса для компактных римановых поверхностей;
- теоремы Римана-Роха в различных формулировках, с полным доказательством для случая эллиптических кривых;
- теоремы Абеля-Якоби для случая эллиптических кривых.

1.2 Задачи курса

Ознакомление студентов с основами алгебраической геометрии и теории комплексных многообразий на нетривиальном, но доступном (в его начальных разделах) примере римановых поверхностей. Подготовка слушателей к более глубокому изучения предмета, создание мотивировок для изучения теории кэлеровых многообразий и когерентных пучков. Подготовка к самостоятельному изучению по алгебраической геометрии и комплексным многообразиям.

1.3 Методическая новизна курса

Значительная часть учебниых пособий, в загалавии которых упоминаются римановы поверхности, в значительной мере состоят из технически трудных доказательств основных теорем, которые (доказательства) т для начинающего читателя немотивированными, поскольку проводятся в недостаточной общности. В данном курсе мы решили пожертвовать доказательствами некоторых наиболее технически трудных результатов, таких, как теорема существования Римана и теорема Римаана-Роха, в пользу большого количества примеров, демонстрирующих, как основные теоремы «работают». Учащийся, который решит в дальнейшем специализироваться по алгебраической геометрии или комплексным многообразиям, сможет познакомиться с этими доказательствами на следующем этапе обучения, когда необходимая техника предстанет в естественной общности.

1.4 Место курса в системе формируемых инновационных квалификаций

Теория комплексных многообразий и алгебраическая геометрия — важные и обширные разделы математики, которые невозможно изучать последовательно и без пропусков: начиная с основных определений и аксиом. Рассматриваемый курс представляет собой один из ваприантов введения в предмет, при изучении которого все слушатели увидят примеры того, как работают уже классические, но нетривиальные разделы алгебраической геометрии, а слушатели, планирующие именно по этим разделам математики специализироваться, получат мотивацию и перспективу для дальнейшего обучения.

2 Содержание курса

2.1 Новизна курса

Идея курса «Римановы поверхности» с упором не на доказательства основных теорем, а на разнообразные примеры является новой. Такие курсы обкатывались в рамках программы "Math in Moscow"; настоящая программа основана на программах этих курсов, переработанных с учетом научных вкусов автора.

2. Тематический план

название темы	количество часов		
	лек	упр	сем
Определение комплексных многообразий, римановых поверхностей и дифференциальных форм	2	2	8
Примеры: сфера Римана, эллиптические кривые, риманова поверхность уравнения $y^2 = P_3(x)$	4	4	12
Вычеты дифференциальных форм; аналоги теоремы о вычетах и принципа аргумента	4	4	12
Характеризация эллиптических кривых	2	2	8
Риманова поверхность, соотвествующая алгебраическому уравнению	2	2	8
Разветвленные накрытия и формула Римана-Гурвица	2	2	8
Дивизоры, линейная эквивалентность, канонический дивизор	4	4	12
Вычет Пуанкаре и построение римановых поверхностей из плоских алгебраических кривых	2	2	8
Задача Миттаг-Леффлера и препятствия к ее разрешимости; различные формулировки теоремы Римана-Роха	2	2	8
Эллиптические функции, $\wp$-функция Вейерпштрасса и теорема существования Римана для эллиптических кривых	2	2	8
Теорема Абеля-Якоби для эллиптических кривых	2	2	8
Формализм линейных систем	2	2	8
Канонические кривые; описание кривых малоых родов	2	2	8
итого	32	32	116

III. Содержание программы

Основные понятия. Определение комплексных многообразий и римановых поверхностей. Проективные пространства как пример комплексных многообразий. Дифференциальные формы.

Примеры римановых поверхностей. Сфера Римана. Эллиптический кривые. Риманова поверхность, соотвествующая уравнению $y^2 = P_3(x)$, где $\deg P_3 = 3$.

Риманова поверхность, соотвествующая алгебраическому уравнению. Конструкция римановой поверхности, соответствующей алгебраическому уравнению. Описание локальных координат. Доказательство компактности.

Разветвленные накрытия и формула Римана-Гурвица. Морфизмы компактных римановых поверхностей. Структура разветвленного накрытия. Степень. Выражение эйлеровой характеристики через степень и ветвление.

Дивизоры. Определение дивизоров. Степень и линейная эквивалентность. Канонический дивизор и выражение его степени через род.

Вычеты в двумерном случае. Формы старшей степени на поверхности. Вычет Пуанкаре на гладкой и нодально кривой. Формулы для рода.

Эллиптические кривые. Эллиптические функции. Функция Вейерштрасса. Теорема существования Римана для эллиптических кривых. Классификация эллиптических кривых.

Дивизоры-2. Задачи Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса. Различные формулировки теоремы Римана-Роха и их эквивалентность. Доказательство теорем Римана-Роха и Абеля-Якоби для эллиптических кривых.

Геометрические приложения. Описание кривых малых родов. Характеризация гиперэллиптических кривых. Способы построения негиперэллиптических кривых малого рода.

2.2 Рекомендуемые учебники

1. R. Gunning. Lectures on Riemann surfaces. Pronceton, NJ, 1966.

2. E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, J. Harris, J. Geometry of algebraic curves. Vol. I. Springer, 1985.

2.3 Формы контроля

Курс рассчитан на 2 модуля. Текущий контроль и, одновременно, важнейшая составляющая курса — самостоятельное решение студентами задач. Каждую неделю студент получает домашнее задание, которое он должен решить дома, а затем обсудить свои записанные решения с преподавателем во время практических занятий. Результаты решения домашних заданий оцениваются в баллах (разное число баллов за разные задачи); сумма баллов затем учитывается при выставлении итоговой оценки.

В конце первого модуля студенты сдают зачет, представляющий собой письменную работу из 5–6 задач, продолжительностью 4 астрономических часа.

В конце второго модуля студенты сдают экзамен, также представляющий собой письменную работу продолжительностью 4 астрономических часа, в ходе которой надо письменно решить 5–6 задач по всему курсу.

Итоговая оценка вычисляется по формуле

$$F = \frac{2}{3}\max(S, E) + \frac{1}{3}\min(S, E),$$

где E — оценка за экзамен (в первом модуле — зачет), а S — оценка за работу в семестре, вычисляемая, в свою очередь, по формуле

$$S = 10 * 1.5 * B/B_{\max},$$

где B — сумма баллов, набранных студентом за решение всех задач из домашних заданий (в первом модуле — за первый модуль, во втором модуле — за второй модуль), а $B_{\max}$ — наибольшая возможная сумма баллов за решение домашних заданий.

Таким образом, для получения максимальной оценки 10 баллов достаточно отлично написать экзамен и решить примерно 65% всех задач из домашних заданий.

2.4 Учебно-методические материалы

Образцы домашних заданий и экзаменационных работ приводятся в дополнении к этой программе.