

# Математические основы естествознания. Теория струн

## Контрольная работа, 2 модуль

1. Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^2} d^2\sigma \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{\sigma}, A \cdot \vec{\sigma})\right) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\sigma \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \sigma_i A_{ij} \sigma_j\right)$$

для матриц: а)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ , б)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , в)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

2. Вычислить объем пространства модулей тора  $V_{WP} = \int_{M_1} d\mu_{WP}$  в метрике Лобачевского-Вейля-Петersona  $ds_{WP}^2 = \frac{d(\text{Re}\tau)^2 + d(\text{Im}\tau)^2}{(\text{Im}\tau)^2} = \frac{d\theta^2 + dT^2}{T^2}$ . Имеет ли ответ физический смысл?
3. При инфинитезимальной замене координат на мировом листе  $\sigma^\alpha \rightarrow \sigma^\alpha + \varepsilon^\alpha(\sigma)$  найти закон преобразования: а) координат частицы  $X(\sigma)$ ; б) двумерной метрики метрики  $g_{\alpha\beta}(\sigma)$ ; в) действия Полякова  $S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \partial_\beta X$ .
4. Вычислить тензор энергии-импульса для теории поля Лиувилля с действием

$$S = \gamma \int_{\Sigma} d^2\sigma \left( \frac{1}{2} \partial_\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi + \mu^2 e^\varphi \right)$$

Является ли теория Лиувилля конформной?

5. В двумерной конформной теории свободного скалярного поля с голоморфным током  $J(z) = i\partial X(z)$  вычислить: а) парный коррелятор токов  $\langle J(z_1)J(z_2) \rangle$ , б) коррелятор четырех токов  $\langle J(z_1)J(z_2)J(z_3)J(z_4) \rangle$ .
6. Для гравитационной  $bc$ -системы с тензором энергии-импульса

$$T(z) = (j-1) : b(z)\partial c(z) : -j : c(z)\partial b(z) :$$

выяснить, при каких значениях  $j$  ток

$$J(z) =: b(z)c(z) :$$

является примарным полем, и каковы его размерности  $(\Delta, \bar{\Delta})$ .

7. Найти асимптотику пропагатора свободной частицы

$$\mathcal{K}(X) = \int_0^\infty dT \frac{e^{-\frac{|X|^2}{2T} - \frac{m^2}{2}T}}{T^{D/2}}$$

на больших и на малых расстояниях  $|X|^2 = \sum_{\mu=1}^D X_\mu^2$  в  $D$ -мерном евклидовом пространстве, в случае: а) массивной частицы  $m^2 > 0$ , б) безмассовой частицы  $m^2 = 0$ , в) тахиона  $m^2 < 0$ .

8. Вычислить интеграл

$$A(P_1, \dots, P_4) = \int_{|z_1|=1} \frac{dz_1}{z_1} \cdots \int_{|z_4|=1} \frac{dz_4}{z_4} \prod_{1 \leq j < k \leq 4} |z_j - z_k|^{2\alpha' P_j \cdot P_k}$$

где  $P_j$  – 26-векторы, такие, что  $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0$  и  $P_j^2 = 1/\alpha'$ .

9. Вычислить пропагатор замкнутой струны

$$\mathcal{K}(X_1, X_0) = \int_{X(\sigma, 0) = X_0; X(\sigma, 1) = X_1} Dg DX e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X_{\mu}}$$

как интеграл на цилиндре  $0 \leq \sigma, \tau \leq 1$  с точечными граничными условиями  $X(\sigma, \tau)|_{\tau=0} = X_0 = \text{const}_0$ ,  $X(\sigma, \tau)|_{\tau=1} = X_1 = \text{const}_1$ ,  $(X(\sigma + 1, \tau) = X(\sigma, \tau))$ . Найти область его особенностей по  $\Delta X = X_1 - X_0$  в 26-мерном евклидовом пространстве и при аналитическом продолжении в пространство Минковского.