Конспект лекции 1

Это только конспект обзорной лекции, и он не является достаточным чтением для освоения курса. После первой лекции следует изучать первую половину (§§1–7, кроме 2.2, 2.3 и 6.2) учебника А. И. Буфетова, Н. Б. Гончарук, Ю. С. Ильяшенко `http://www.dyn-sys.org/public/ODE-notes/ODEprint.pdf`

Определение. *Дифференциальное уравнение* порядка n – запись вида

$$x^{(n)} = f(x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, \dots, x', x, t), \qquad (*)$$

где $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ – функция от $n+1$ переменной.

Пример. Дифференциальные уравнения $x'' = 2x' - x$, $x' = x - t^2$, $x'' = \sin x$.

Определение. Решение дифференциального уравнения $(*)$ на интервале (a, b) – функция $x : (a, b) \to \mathbb{R}$ от переменной $t \in (a, b)$, такая, что равенство

$$x^{(n)}(t) = f\big(x^{(n-1)}(t), x^{(n-2)}(t), \dots, x'(t), x(t), t\big)$$

верно при любом $t \in (a, b)$ (напомним, что через $x^{(k)}(t)$ обозначается k-я производная функции $x(\cdot)$ в точке t).

Пример. Некоторые решение уравнений из прошлого примера: $x(t) = te^t$, $x(t) = t^2 + 2t + 2$, $x(t) = 0$ соответственно.

Пример. Простейшее дифференциальное уравнение $x'(t) = f(t)$ – задача о поиске первообразной функции f (т. е. ее интегрирования). Поэтому процесс решения дифференциальных уравнений еще называется их интегрированием.

Пройдя "обычные" уравнения, Вы в первую очередь изучили следующие вопросы:

1) Зачем нужны уравнения: запись "жизненных" задач уравнениями.

2) Символьное решение уравнений: $x + 3 = 5 \Rightarrow x = 5 - 3$.

3) Существование и единственность решений: если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна и $f(a) < 0 < f(b)$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет решение.

4) Качественное изображение графиков функций для качественного анализа корней уравнений: узнайте, не решая уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$, сколько у него корней.

Наш первый модуль будет посвящен реализации этой программы для дифференциальных уравнений, а второй модуль – их геометрии и топологии.

1. Запись "жизненных" задач уравнениями.

Пример. Закон "скорость роста популяции зайцев пропорциональна размеру популяции с коэффициентом a" записывается диффернциальным уравнением так: $x' = ax$, где x – величина популяции. Решением уравнения является функция $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, выражающая зависимость величины популяции от времени: число $x(t)$ – величина популяции в момент времени t.

Если, помимо размножения, на рост зайцев влияет другой фактор – скажем, охотник бьет c зайцев в месяц, то эти факторы складываются: $x' = ax - c$.

Пример. Прошлый пример предполагал отсутствие волков. Пусть в лесу есть зайцы в числе x, растущие в изоляции по закону $x' = ax$, и волки в числе y, мрущие в изоляции по закону $y' = -by$, а встречи волков с зайцами случаются с частотой, пропорциональной xy. Если скорость убыли зайцев в результате этих встреч пропорциональна частоте встреч xy с коэффициентом p, а скорость прироста волков – с коэффициентом q, то получается система двух дифференциальных уравнений: $x' = ax - pxy$, $y' = -by + qxy$, называемая моделью Лотка–Вольтерра системы хищник–жертва.

Замечание. В этом примере получилось уже не одно уравнение, а система уравнений. Пара чисел (x, y) (т. е. указание какой-либо численности волков и зайцев) называется *состоянием* этой системы, координатная плоскость $\mathbb{R}^2$ – *пространством состояний* системы. Решение системы – пара функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая обоим уравнениям – обычно рассматривается как одно отображение $(x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, посылающее каждый момент времени $t \in \mathbb{R}$ в состояние системы $\big(x(t), y(t)\big) \in \mathbb{R}^2$. Образ этого отображения, т. е. множество состояний $\big(x(t), y(t)\big)$ во все моменты времени, называется *фазовой кривой* системы.

Пример. Рассмотрим систему $x' = x$, $y' = y$ (популяции зайцев на двух материках). Одно из ее решений – $x = e^t$, $y = e^t$ (одинаковые популяции), и соответствующая фазовая кривая на фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ – луч $x = y > 0$. Другое решение – $x = 2e^t$, $y = 2e^t$ (одинаковые популяции, но вдвое многочисленнее), и соответствующая фазовая кривая на фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ – тот же самый луч $x = y > 0$. Третье решение – $x = e^t$, $y = 0$ (на одном из материков зайцы не живут), и фазовая кривая – другой луч $x > 0$, $y = 0$. Четвертое решение – $x = y = 0$ (зайцев нет), и фазовая кривая – точка $(0, 0)$.

2. Символьное решение уравнений.

Уравнение размножения зайцев $x' = ax$ описывает также и другие важные природные процессы, поэтому было решено уже в XVII веке, причем двумя способами.

Способ 1 (метод производящих функций): будем искать решение в виде ряда $x(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots$ (люди тогда не задумывались, представима ли функция таким рядом – степенные ряды назвались “непрерывными функциями”, и другие функции просто не изучались). Дифференцируя ряд по t почленно, получим: $p_1 + 2p_2 t + 3p_3 t^2 \ldots = ap_0 + ap_1 t + ap_2 t^2 + \ldots$. Приравнивая коэффициенты при степенях t, получим цепочку равенств $ip_i = ap_{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$, из которых $p_i = p_0 \frac{a^i}{i!}$. Поэтому любое решение имеет вид $x(t) = p_0 \sum_i \frac{a^i}{i!} t^i = p_0 e^{at}$, где p_0 – любая константа.

Способ 2 (метод разделения переменных): Домножив уравнение $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax$ на $\frac{\mathrm{d}t}{x}$, получим $\frac{\mathrm{d}x}{x} = a\,\mathrm{d}t$ (люди тогда еще не знали, что $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ – неделимый символ). Это действие называется разделением переменных, так как теперь x только в правой части, а t только в левой. Приписав знак интеграла к обеим частям и проинтегрировав, получим $\ln x = at + C$, то есть $x(t) = Ce^{at}$, где C – любое число.

Конечно, решение $x(t) = Ce^{at}$ уравнения $x' = ax$ можно просто угадать, но Способы 1 и 2 позволяют доказать, что других решений нет, а также решить аналогичным образом множество других важных уравнений. **Изложите оба спосо-**

ба на математическом уровне строгости!

4а. Качественное изображение дифференциальных уравнений.

На семинарах Вы разберете много приемов символьного решения дифференциальных уравнений, помимо способов 1 и 2. Но, как и в случае с обычными уравнениями, не все дифференциальные уравнения можно решить символьно, то есть представить решения в форме выражений, состоящих из элементарных функций, констант и переменной t. Например, в отличие от уравнения размножения зайцев, модель Лотка-Вольтерра не поддается символьному решению.

Над частными приемами символьного решения алгебраических уравнений стоит теория Галуа (Алгебра-2, 3 модуль), позволяющая разобраться с любым конкретным уравнением: решить его или доказать, что в радикалах оно не решается. Точно так же, над упомянутыми частными приемами символьного решения дифуров стоит дифференциальная теория Галуа, придуманная Ли, Пикаром и Вессио в конце XIXв.

Дифференциальные уравнения, которые не решаются символьно, остается только исследовать качественно. Например, в случае модели Лотка-Вольтерра, возникает естественный качественный вопрос: Ok, пускай мы не можем выразить элементарными функциями зависимость численности животных от времени. Но хочется хотя бы понять, к чему придет система через миллион лет: вымрут ли волки, или вымрут зайцы (а затем неизбежно волки), или оба вида останутся соуществовать?

Как и в случае с обычными уравнениями, для подобного качественного анализа дифференциальных уравнений нам нужна геометрическая интуиция, то есть способы изображать диференицальные уравнения графически. Мы опишем такой способ для *автономных* систем двух уравнений

$$x' = u(x, y),\ y' = v(x, y), \qquad (**)$$

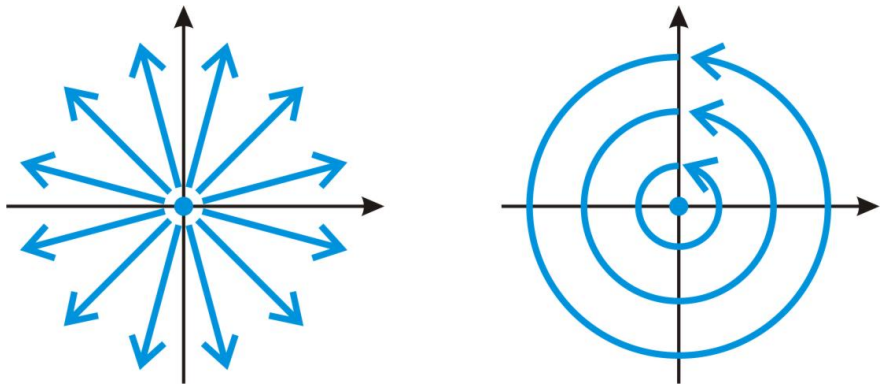
т. е. таких, у которых в правую часть не входит переменная t (такой вид, например, имеет модель Лотка-Вольтерра). Этот способ – изображение на фазовой плоскости всех фазовых кривых состемы; т. е. ее *фазового портрета*.

Пример. Все решения ранее разобранной системы $x' = x$, $y' = y$ имеют вид $x(t) = ae^t$, $y(t) = be^t$ с произвольными вещественными a и b (ведь эти два уравнения можно решить независимо), поэтому ее фазовый портрет состоит из следующих траекторий: точка $(0, 0)$, соответствующая решению с константами $a = b = 0$, и все выходящие из нее лучи (**объясните это утверждение!**).

Все решения системы $x' = -y$, $y' = x$ имеют вид $x(t) = r\cos(t + a)$, $y(t) = r\sin(t + a)$ с произвольными вещественными a и r (**решите эту систему одним из разобранных выше способов!**), поэтому ее фазовый портрет состоит из следующих траекторий: точка $(0, 0)$ и все окружности с этим центром.

Все решения системы $x' = -2y$, $y' = 2x$ имеют вид $x(t) = r\cos(2t + a)$, $y(t) = r\sin(2t + a)$, поэтому ее фазовый портрет будет точно таким же, как и у предыдущей системы, хотя решения у систем разные: одна и та же фазовая окружность во втором случае пробегается траекторией в два раза быстрее, чем в первом.

Портрет первой системы изображен слева, портреты остальных двух – справа:



Эти картинки наглядно показывают свойства решений систем: например, решения первой системы, которые в начальный момент времени были сколь угодно близки, через достаточно много времени разойдутся сколь угодно далеко (т. е. решения *неустойчивы*), решения же второй системы устойчивы.

Замечание. Конечно, на картинке нельзя изобразить все фазовые кривые. От изображения фазового портрета требуется только, чтобы нарисованные фазовые кривые представляли все присутствующие в системе типы качественного поведения. Например, на вышеприведенных картинках было бы ошибкой не нарисовать фазовую кривую – точку равновесия, но не было бы ошибкой нарисовать меньше лучей и окружностей.

Не составляет труда рисовать фазовые портреты систем, которые мы решили символьно (как в предыдущем примере). Наша же задача – научиться приблизительно рисовать фазовые портреты систем, которые символьно не решаются. Для этого понадобится следующее очевидное замечание.

Напоминание из Анализа-1. *Траекторией,* или *параметризованной кривой*, на плоскости $\mathbb{R}^2$ называется отображение интервала в плоскость $c = (c_1, c_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, заданное гладкими функциями $c_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. *Вектором скорости* этой траектории, или *касательным вектором* к этой параметризованной кривой, в точке $c(t)$ называется вектор $c'(t) = \big(c_1'(t), c_2'(t)\big)$. Если вектор скорости ненулевой, то он задает направление касательной к траектории, то есть направление вектора $c'(t)$ является пределом направлений хорд, соединяющих точку $c(t)$ с близкой точкой $c(t+\varepsilon)$ кривой c при $\varepsilon \to 0$. **Аккуратно сформулируйте и докажите это утверждение! Без его понимания дальнейшие попытки понять дифференциальные уравнения бессмысленны!**

Замечание. Касательным вектором к интегральной траектории системы $(**)$ в точке (x_0, y_0) является вектор $\big(u(x_0, y_0),\ v(x_0, y_0)\big)$. Действительно, интегральная траектория $(x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ проходит через точку (x_0, y_0), если $x(t) = x_0$ и $y(t) = y_0$ для некоторого t. Подставляя эти значения $x(t)$ и $y(t)$ в уравнения системы $x'(t) = u\big(x(t), y(t)\big)$, $y'(t) = v\big(x(t), y(t)\big)$, которым удовлетворяют функции x и y, получим требуемое равенство: $x'(t) = u(x_0, y_0)$, $y'(t) = v(x_0, y_0)$.

Поэтому фазовый портрет системы $(**)$ можно приближенно рисовать так: нарисовать на плоскости много точек (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 1000$, и от каждой точки (x_i, y_i) отложить вектор $\big(u(x_i, y_i),\ v(x_i, y_i)\big)$. А потом попытаться рисовать линии, которые вблизи каждой из нарисованных точек имеют направление, близкое к отложенному от этой точки вектору. Можно надеяться, что получившиеся линии

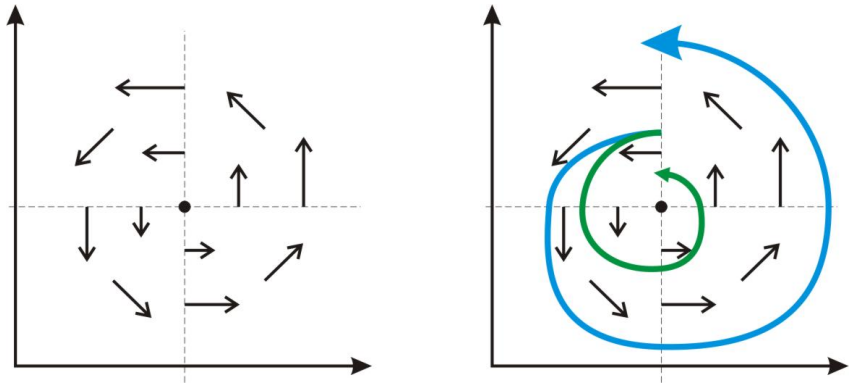
будут близки к фазовым кривым системы.

Пример. Попробуем нарисовать фазовый портрет модели Лотка-Вольтерра, для краткости положив все коэффициенты единичными: $x' = x - xy$, $y' = -y + xy$. Начнем рисовать векторы скорости.

1) В точке $x = y = 1$ вектор скорости $(x - xy, -y + xy)$ нулевой, т. е. $x(t) = y(t) = 1$ – постоянное решение системы (один волк и один заяц, волк постоянно откусывает по кусочку зайца, чтобы не худеть, а заяц постоянно толстеет, в точности успевая регенерировать откушенные кусочки). Эту *точку равновесия* мы нашли, решив систему уравнений $x - xy = -y + xy = 0$.

2) Во любой точке луча $x = 1$, $y > 1$ вектор скорости смотрит влево, в точках луча $x < 1$, $y = 1$ – вниз, в точках $x = 1$, $y < 1$ – вправо, в точках $x > 1$, $y = 1$ – вверх. В образованных этими лучами четырех квадрантах векторы можно дорисовать по непрерывности. Получившиеся векторы показаны на следующем рисунке слева.

3) Поставив ручку в какую угодно точку луча $x = 1$, $y > 1$, поведем кривую в направлении здешнего вектора скорости, т. е. влево, дальше кривая вместе с векторами скорости загнется вниз, пересечет луч $x < 1$, $y = 1$ вертикально и т. д. В результате получившаяся кривая сделает полный оборот вокруг точки равновесия $(1, 1)$ и вернется в какую-то точку луча $x = 1$, $y > 1$, примерно как синяя и зеленая линии на рисунке справа.



Это художественное рассуждение никоим образом не пригодно для решения задач нашего курса. Мы изучим методы, позволяющие делать и доказывать утверждения о фазовых портретах на математическом уровне строгости. Тем не менее, когда человек столкнулся с новой системой дифференциальных уравнений, и ему хочется интуитивно понять, какие утверждения о ее фазовом портрете он собирается делать и доказывать, он первым делом нарисует художественную картинку, как описано выше (возможно, с помощью компьютера).

Определение. Этот способ визуализации автономных систем уравнений привел к тому, что автономная система $(**)$ называется также *векторным полем* (u, v) на плоскости.

Позже мы дадим более инвариантное, бескоординатное определение векторного поля (оно удобно по тем же причинам, которые побудили нас перейти от ариф-

метического пространства $\mathbb{R}^n$ к абстрактным векторным пространствам в курсе алгебры).

4б. Качественное исследование дифференциальных уравнений.

Замечание. Нарисованный нами эскиз фазового портрета системы Лотка–Вольтерра, увы, не позволяет ответить на простейшие качественные вопросы. Что, например, произойдет с интегральной кривой за большое время? Напрашиваются несколько вариантов ответа:

1) Интегральная кривая, сделав вышеописанный виток вокруг точки равновесия и вернувшись на луч $x = 1$, $y > 1$, окажется дальше от точки равновесия, чем была (синяя кривая на прошлом рисунке). Сделав второй виток, она окажется еще дальше, и т. д. Причем даже это "и т. д." может означать два разных исхода: с течением времени интегральная кривая будет пересекать луч $x = 1$, $y > 1$ в точках, ординаты которых стремятся либо к бесконечности, либо к какому-то конечному числу.

2) Интегральная кривая, обогнув точку равновесия и вернувшись на луч $x = 1$, $y > 1$, окажется ближе к точке равновесия, чем была (зеленая кривая). С ростом числа витков здесь также возможны два варианта.

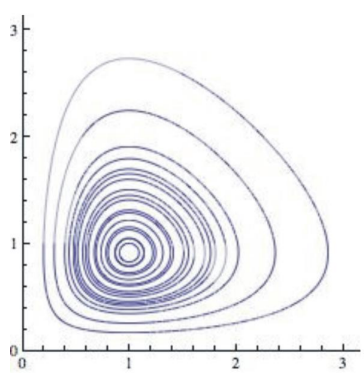
3) Сделав виток, интегральная кривая чудесным образом попала в ту же точку луча $x = 1$, $y > 1$, из которой вышла (монетка встала на ребро). Тогда все новые витки совпадут с первым, т. е. решение системы окажется периодическим.

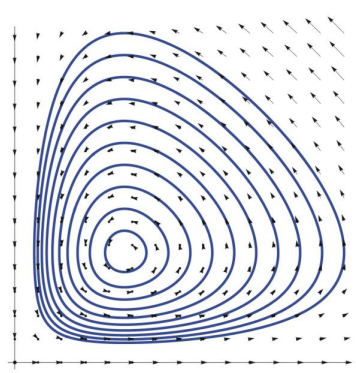
Утверждение. Имеет место вариант (3), т. е. колебания численности зайцев и волков всегда периодические, и никто не вымрет.

Доказательство. Рассмотрим функцию на плоскости $f(x, y) = x + y - \ln x - \ln y$ (как мы до нее догадались – потом обсудим отдельно). Нарисуем ее линии уровня, т. е. линии

$$x + y - \ln x - \ln y = c \tag{1}$$

для всевозможных чисел c (слева на рисунке):





Докажем, что интегральная траектория (x, y) системы Лотка-Вольтерра

$$x' = u(x, y) = x - xy, \; y' = v(x, y) = -y + xy,$$

имеющая хотя бы одну общую точку с кривой (1), целиком содержится в этой кривой. Иными словами, нам нужно доказать, что функция $\varphi(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$

является константой. Для этого найдем ее производную по формуле дифференцирования сложной функции: $\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)y'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)u(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)v(x, y)$. Второе равенство в цепочке имеет место потому, что функции x и y удовлетворяют системе. Подставив в последнее выражение данные нам f, u и v, получим $(1 - 1/x)(x - xy) + (1 - 1/y)(-y + xy)$, т. е. 0.

Из доказанного следует, что вышеприведенная картина линий уровня функции $f(x, y) = x + y - \ln x - \ln y$ и является фазовым портретом системы Лотка-Вольтерра, т. е. линии уровня функции f являются фазовыми кривыми системы (справа на рисунке). $\square$

Заметим однако, что символьное описание фазовых кривых еще не дает символьного описания интегральных траекторий. Иными словами, мы теперь имеем формулу, отвечающую на вопрос: "Сколько зайцев будет в лесу при 30 волках, если при 20 волках в этом лесу бывает 20 зайцев?", но по-прежнему не имеем формулы, отвечающей на на вопрос: "Сколько зайцев будет в лесу к концу года, если в начале года было 20 зайцев и 20 волков?". Более того, напоминаю, что такой формулы для модели Лотка–Вольтерра и не существует.

Определение. Дифференцируемая функция f, такая что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)u(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)v(x, y) = 0 \tag{2}$$

при всех x и y, называется *первым интегралом* системы $(**)$. Она важна тем, что, как мы показали, остается постоянной вдоль траекторий системы $(**)$, то есть $\varphi(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ – константа, то есть фазовые кривые системы $(**)$ содержатся в линиях уровня функции f.

Как мы увидели на примере модели Лотка-Вольтерра, первый интеграл помогает построить фазовый портрет системы и ответить на многие качественные вопросы о поведении ее решений. Поэтому важно уметь находить первые интегралы. Проблема в том, что уравнение (2) не является дифференциальным уравнением, потому что искомая функция f зависит не от одной переменной t, а от двух, и в уравнение входят обе ее частные производные (такое уравнение называется уравнением в частных производных). Мы не обсуждаем в этом курсе, как решать такие уравнения, поэтому и первые интегралы будем искать не по определению (2), а другим способом, которому посвящена следующая лекция.

Конспект лекции 2

Предупреждение. В тексте будет много тавтологических утверждений (и ни одного содержательного). При таком раскладе писать доказательства бессмысленно: их чтение не проясняет суть и не приводит к выработке навыков. Чтобы вырабатывать навыки и контролировать понимание, читатель должен самостоятельно проверять тавтологии. Для помощи в этом нелегком деле тавтологии, требующие проверки, указаны **жирным шрифтом**.

Проясним оставшуюся с прошлой лекции неясность: как мы догадались, что система Лотка-Вольтерра $x' = u(x,y) = x - xy$, $y' = v(x,y) = -y + xy$ имеет первый интеграл $x + y - \ln x - \ln y$, т. е. фазовые кривые имеют вид $x + y - \ln x - \ln y = c$? Отвечая на этот вопрос, мы проиллюстрируем способ, который позволяет найти первые интегралы и для многих других важных дифференциальных уравнений.

Для этого перепишем систему в виде $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(x,y)$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v(x,y)$, а затем, выразив $\mathrm{d}t$ из обоих равенств, в виде

$$\frac{\mathrm{d}x}{u(x,y)} = \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}y}{v(x,y)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{u(x,y)} = \frac{\mathrm{d}y}{v(x,y)} \quad \Rightarrow \quad v(x,y)\mathrm{d}x = u(x,y)\mathrm{d}y. \qquad (3)$$

Как и в примере с разделением переменных, это чисто мнемоническое действие с неясной пока смысловой нагрузкой приведет нас к верному ответу. При $u(x,y) = x - xy$ и $v(x,y) = -y + xy$ последнее равенство примет вид $y(x-1)\mathrm{d}x = x(1-y)\mathrm{d}y$, и в нем можно разделить переменные: $\frac{x-1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1-y}{y}\mathrm{d}y$. Приписав знак интеграла к обеим частям, получим $x - \ln x = \ln y - y + c$, т. е. искомое уравнение фазовой кривой системы Лотка-Вольтерра.

В старых учебниках дифференциальных уравнений эти вычисления без зазрения совести записывают и комментируют буквально как изложено выше. Но мы, конечно, на этом не остановимся, и сегодня придадим этим мнемоническим действиям математический смысл. Мы начнем с последнего равенства в цепочке (3), которое традиционно записывают в виде $v(x,y)\mathrm{d}x - u(x,y)\mathrm{d}y = 0$ и называют "*уравнением в дифференциалах*".

1-формы

Сейчас мы определим 1-формы и действия с ними. Начало истории будет выглядеть как рассказ про дифференцируемые функции на заумном языке, но потом станет ясно, зачем это нужно. Пусть N – n-мерное вещественное векторное пространство.

Определение. *Росток функции* в точке $x \in N$ – это функция $f : U \to \mathbb{R}$, определенная на некотором открытом множестве $U \ni x$.

Часто ростком функции в $x \in N$ называют класс эквивалентности таких функций, считая $f : U \to \mathbb{R}$ и $g : V \to \mathbb{R}$ эквивалентными, если $f = g$ на $U \cap V$. Для наших целей эта терминологическая разница несущественна, так как мы введем другое, более сильное отношение эквивалентности на ростках.

Определение. Назовем ростки функций f и g в точке $a \in N$ *эквивалентными в точке* a, если $f(x) - g(x) = f(a) - g(a) + o(|x - a|)$. (Это определение требует выбора нормы $|\cdot|$ в N, но не зависит от этого выбора – **проверьте!**)

Например, *дифференцируемая* функция f – функция, эквивалентная линейной. В прошлом году мы называли эту линейную функцию *дифференциалом* функции

f в точке x_0, но теперь нам будет удобнее называть так весь класс эквивалентности функции f (мы будем по-прежнему обозначать его $\mathrm{d}f_a$).

Определение. *1-форма* в точке $a \in N$ – дифференциал линейной функции в этой точке (то есть класс ростков функций, эквивалентных в этой точке некоторой линейной функции). Множество 1-форм в точке a обозначается через T_a^*N и называется *кокасательным пространством к N в точке a*. Оно по определению находится во взаимно однозначном соответствии с пространством линейных функций на N, т. е. с двойственным пространством N^*.

Это взаимно однозначное соответствие задает на T_a^*N структуру вещественного векторного пространства, т. е. 1-формы в точке a можно складывать и умножать на вещественное число. Другими словами сумму 1-форм α и β можно определить так: выберем функции f и g с дифференциалами α и β соответственно, и определим сумму $\alpha+\beta$ как дифференциал функции $f+g$ в той же точке. Это определение не зависит от выбора f и g – **проверьте это и определите аналогичным образом умножение формы на число!**

Определение. *Кокасательным расслоением* области $U \subset N$ называется множество всех 1-форм во всех точках области U, т. е. объединение кокасательных подпространств T_a^*N во всех точках $a \in U$. Кокасательное расслоение обозначается через T^*U. Взаимно однозначное соответствие $t : T^*U \to U \times N^*$, отображающее 1-форму α в точке a в пару

$$(a, \text{ линейная функция, представляющая } \alpha) \in U \times N^*,$$

называется *тривиализацией* кокасательного расслоения. Тривиализация задает на кокасательном расслоении *гладкую структуру*: отображение из векторного пространства M в кокасательное расслоение (или обратно) называется *дифференцируемым* или *непрерывным*, если его композиция с тривиализацией t является дифференцируемым или непрерывным отображением векторных пространств $M \to N \times N^*$ (или $N \times N^* \to M$).

1-формы в координатах

Чтобы разобрать вышеперечисленные абстрактные понятия на примерах, нам нужны координаты. Выберем *гладкую систему координат* (координатных функций) $x_1, \ldots, x_n$ на векторном пространстве N, то есть диффеоморфизм $(x_1, \ldots, x_n) : N \to \mathbb{R}^n$ (**вспомните, что это такое!**), переводящий каждую точку $a \in N$ в точку $\Big(x_1(a), \ldots, x_n(a)\Big) \in \mathbb{R}^n$.

Сейчас мы по этой гладкой системе координат построим координаты в кокасательном расслоении T^*N. Каждая координатная функция $x_i : N \to \mathbb{R}$ определяет функцию $x_i : T^*N \to \mathbb{R}$, сопоставляющую 1-форме в точке a число $x_i(a)$, и обозначаемую поэтому той же буквой x_i. Также для каждого $i = 1, \ldots, n$ определим функцию $\frac{\partial}{\partial x_i} : T^*N \to \mathbb{R}$, значение которой на 1-форме α в точке a определяется так: выберем функцию f с дифференциалом α и определим значение $\frac{\partial}{\partial x_i}$ на α как частную производную $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Это определение не зависит от выбора f – **проверьте! Также проверьте**, что функции $x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ образуют гладкую систему координат на кокасательном расслоении T^*N.

Замечание. Если у Вас получилось доказать предыдущее утверждение, то

Вы ошиблись. Указанная система координат на кокасательном расслоении будет гладкой, если функции $x_1, \ldots, x_n$ дважды дифференцируемы, **проверьте это!** (Теперь уж без обмана.)

Пример. В противном случае это не верно. Рассмотрим, например, функцию $x(t) = t(1+|t|)$ на числовой прямой $\mathbb{R}^1$. Эта функция образует на прямой гладкую систему координат (**проверьте это!**); тем не менее, функции x и $\frac{\partial}{\partial x}$ не образуют гладкую систему координат на плоскости $T^*\mathbb{R}^1$ – **укажите, в каких точках нарушается гладкость!**

Пример. Пусть (x, y) стандартные координатные функции на $\mathbb{R}^2$, тогда $T^*\mathbb{R}^2$ – четырехмерное пространство с координатами $(x, y, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$. В этой системе координат 1-форма $\mathrm{d}(x^2 + y^2)_{(1,3)}$ (то есть дифференциал ростка функции $x^2 + y^2$ в точке $(1, 3)$) имеет координаты $(1, 3, 2, 6)$ – **проверьте это!**

Пример. Если две 1-формы в точке с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ имеют координаты $(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n)$ и $(x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n)$ соответственно, то их сумма имеет координаты $(x_1, \ldots, x_n, u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$.

Введя координаты на кокасательном расслоении, нужно научиться делать замены координат. Пусть $u_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n = f_n(x_1, \ldots, x_n)$ – гладкая замена координат в области U (**вспомните, что это такое!**); как новые координаты $u_1, \ldots, u_n, \frac{\partial}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n}$ на кокасательном расслоении T^*U выражаются через старые $x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$? Запишем формулы дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial u_n}$$

$$\ldots$$

$$\frac{\partial}{\partial x_n} = \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial}{\partial u_n}.$$

Но мы хотим понимать эти равенства не в смысле прошлого года (т. е. как равенство опреаций дифференцирования функций на области U), а в смысле этой лекции (т. е. как равенство функций на T^*U). **Осуществите этот переход!**

Обозначим через $J(a)$ матрицу Якоби замены координат $u = f(x)$ в точке $a \in U$ (компоненты этой матрицы – частные производные $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(a)$). Тогда можем записать приведенные выше равенства в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} = J(x) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u_n} \end{pmatrix},$$

поэтому искомая замена координат выглядит так:

$$u_1 = f_1(x)$$

$$\ldots$$

$$u_n = f_n(x)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u_n} \end{pmatrix} = J(x)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Пример. Рассмотрим замену координат на плоскости с выкинутой осью ординат, называемую *“раздутием”* (*“blowup”*): $u = x$, $v = y/x$. Для нее имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \cdot \frac{\partial}{\partial v}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = 0 \cdot \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial}{\partial v}$$

Обращая матрицу Якоби $J(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -x/y^2 \\ 0 & 1/x \end{pmatrix}$, получим замену координат на кокасательном пространстве:

$$u = x, \qquad v = y, \qquad \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial v} = x \cdot \frac{\partial}{\partial y}$$

Уравнения в дифференциалах

Определение. *Дифференциальная 1-форма*, или *поле 1-форм* в области $U \subset N$ – отображение $\omega : U \to T^*U$, сопоставляющее каждой точке $a \in U$ 1-форму в этой точке: $\omega(a) \in T_a^*N$.

Пример. *Дифференциалом функции* $f : U \to N$ называется дифференциальная форма на U, значение которой в каждой точке $a \in U$ является дифференциалом функции f в этой точке. Дифференциал обозначается через $\mathrm{d}f$.

Суммой форм ω_1 и ω_2 на области $U \subset N$ называется форма ω, такая что $\omega(a) = \omega_1(a) + \omega_2(a)$ в каждой точке $a \in U$. Произведением формы ω и функции f на области U называется форма ω' такая, что $\omega'(a) = f(a)\omega(a)$ в каждой точке $a \in U$.

Эти операции определяют на множестве дифференциальных форм структуру модуля над кольцом функций.

Вышеперечисленные операции над формами позволяют представить любую дифференциальную форму ω как линейную комбинацию дифференциалов координатных функций.

Утверждение. Если $x_1, \ldots, x_n$ – гладкие координаты в области U, то

$$\omega = f_1 \cdot \mathrm{d}x_1 + \ldots + f_n \cdot \mathrm{d}x_n, \tag{4}$$

где $f_i : U \to \mathbb{R}$ – функция, значение которой в точке a равно $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\omega(a)\Big)$, и дифференциальная форма $\mathrm{d}x_i$ – дифференциал координатной функции x_i. (Функции $f_1, \ldots, f_n$ называются *компонентами* формы ω в координатах $x_1, \ldots, x_n$.)

Пример. $y^2\mathrm{d}x - 2\mathrm{d}y$ – дифференциальная форма на плоскости $\mathbb{R}^2$ со стандартными координатами (x,y). Ее компоненты в этих координатах – y^2 и 2.

Доказательство. Заметим, что $\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{d}x_j) = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \mid i=j \\ 0 \mid i \neq j \end{smallmatrix} \right.$. Действительно, по определению координатных функций $\frac{\partial}{\partial x_i}$ это эквивалентно очевидному равенству $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \mid i=j \\ 0 \mid i \neq j \end{smallmatrix} \right.$. Разложив 1-форму $\omega(a)$ по базису $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ в n-мерном пространстве T_x^*N, получим $\omega(a) = b_1\mathrm{d}x_1 + \ldots + b_n\mathrm{d}x_n$. Применив $\frac{\partial}{\partial x_i}$ к обеим частям этого равенства, получим $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\omega(a)\Big) = b_1\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{d}x_1) + \ldots + b_n\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{d}x_n) = b_i$. $\square$

Пример. В случае, когда $\omega = \mathrm{d}g$ – дифференциал, вышеуказанные формулы для компонент дифференциальной формы дают:

$$\mathrm{d}g = \frac{\partial g}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \tag{5}$$

(**проверьте, что они действительно это дают!**)

Форма ω является непрерывной (соответственно, дифференцируемой), если ее компоненты в гладких координатах являются непрерывными (соответственно, дифференцируемыми) функциями. Заметьте, что это не определение, а утверждение; давать определения с помощью координат в геометрии – mauvais ton. **Найдите выше по тексту определение непрерывного/дифференцируемого отображения в кокасательное расслоение, разберитесь, что оно означает применительно к дифференциальной форме, и докажите это утверждение!**

Определение. *Уравнением в дифференциалах*, или *уравнением Пфаффа* называется запись $\omega = 0$, где ω – дифференциальная 1-форма.

Осталось объяснить, что называется решением уравнения в дифференциалах. Для этого напомним, что *гиперповерхностью* в N называется гладкое подмногообразие в N размерности $n-1$. Более подробно:

Определение. Множество $H \subset N$ называется *гладкой гиперповерхностью* в N, если в каждой точке $a \in H$ существует росток дифференцируемой функции $f : U \to \mathbb{R}$, такой что $df_a \neq 0$ и $H \cap U = \{x \mid f(x) = 0\}$ (то есть *множество H в окрестности каждой своей точки представляется как множество нулей функции, для которой ноль – регулярное значение*). Функция f в этом случае называется *локальным уравнением* гиперповерхности в точке a.

Пример. Интервал на плоскости – гладкая гиперповерхность, а отрезок на плоскости – нет. Сфера в пространстве – гладкая гиперповерхность, а интервал в пространстве – нет. (**Докажите эти очевидные утверждения!**)

Определение. Гладкая гиперповерхность H называется *решением*, или *интегральной поверхностью* уравнения в дифференциалах $\omega = 0$, если в каждой точке $a \in H$ 1-форма $\omega(a)$ кратна дифференциалу некоторого локального уравнения H в этой точке (а тогда и любого локального уравнения, потому что все локальные уравнения данной гиперповерхности в данной ее точке имеют один дифференциал – **докажите это!**). Совокупность всех решений данного уравнения называется определяемым им *слоением*.

Пример. Окружность $x^2 + y^2 = 1$ является решением уравнения в дифференциалах $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$, потому что дифференциал уравнения $x^2 + y^2 - 1$ в каждой точке окружности равен $2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y$, а значит форма $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$ ему кратна. Слоение, определяемое уравнением $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$, состоит из всех окружностей с центром в 0.

Пример. Прямая $y = 0$ является решением уравнения $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0$, потому что форма $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = x\mathrm{d}y$ кратна дифференциалу $\mathrm{d}y$ в каждой точке этой прямой. Слоение, определяемое уравнением $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$, состоит из всех прямых, проходящих через ноль.

Конспект лекции 3

В прошлый раз мы определили уравнения в дифференциалах и их интегральные поверхности, в этот раз разберем два естественных вопроса: как их решать, и как они связаны с обычными дифурами. Ответив на эти два вопроса, мы, наконец, объясним смысл выкладок типа вычисления первого интеграла в системе Лотка-Вольтерра.

Связь уравнений в дифференциалах с дифурами

Выясним, что означает решение уравнения в дифференциалах в координатах.

Утверждение. Пусть в области U задана форма $\omega = u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y$, которая нигде не обращается в ноль, и гладкая кривая $C : (a, b) \to U$, $C'(t) \neq 0$. Образ кривой C является решением уравнения $\omega = 0$ если и только если вектор $C'(t)$ кратен вектору $\big(v(C(t)), -u(C(t))\big)$ при кадом t.

Доказательство. Пусть образ кривой в окрестности точки $a = C(t_0)$ задается уравнением $f = 0$, где f – гладкая функция, такая что $\mathrm{d}f(a) \neq 0$. Дифференцируя тождество $f(C(t)) = 0$ по t при $t = t_0$, получим, что вектор $C'(t_0)$ кратен вектору $\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a),\, -\frac{\partial f}{\partial x}(a)\right)$ (**проверьте это!**). Определение же решения уравнения $\omega = 0$ состоит в том, что вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a),\, \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$ кратен $(u(a), v(a))$. $\square$

Эта теорема доказывает (**объясните, как!**) следующую связь между решениями уравнений в дифференциалах и дифференциальных уравнений на плоскости.

Следствие. Фазовые кривые системы автономных уравнений на плоскости $x' = -v(x, y)$, $y' = u(x, y)$ являются решениями уравнения в дифференциалах $u(x, y)\mathrm{d}x + v(x, y)\mathrm{d}y = 0$.

Пример. Фазовые кривые системы $x' = -y$, $y' = x$ (окружности) являются решениями уравнения в дифференциалах $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$.

Нас особенно интересует частный случай: оказывается, каждое неавтономное уравнение первого порядка

$$y' = f(y, x) \qquad (*)$$

можно рассматривать как систему двух автономных уравнений первого порядка

$$y' = f(y, x),\ x' = 1 \qquad (**).$$

Более точно, графики решений $y = y(x)$ уравнения $(*)$ являются фазовыми кривыми системы $(**)$, **докажите это!**

Замечание. В системе $(**)$ и x, и y обозначают функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ от независимой переменной t, в то время как в уравнении $(*)$ через y обозначается функция $y = y(x)$ от независимой переменной x.

Применяя предыдущее следствие к системе $(**)$, получаем:

Следствие. Графики решений уравнения $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = u(x, t)$ являются решениями уравнения в дифференциалах $\mathrm{d}x - u(x, t)\mathrm{d}t = 0$.

Пример. Графики решений $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = x$ (экспонент) являются решениями уравнения в дифференциалах $\mathrm{d}x = x\mathrm{d}t$.

Следствие. Графики решений уравнения $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = v(x,y)/u(x,y)$ содержатся в фазовых кривых системы уравнений $x' = u(x,y)$, $y' = v(x,y)$.

Действительно, согласно предыдущим двум следствиям, и те, и другие являются решениями уравнения в дифференциалах $v(x,y)\mathrm{d}x - u(x,y)\mathrm{d}y = 0$, и при этом область определения уравнения содержится в области определения системы.

Пример. Графики решений уравнения $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -x/y$ (функций вида $y = \sqrt{c - x^2}$) содержатся в фазовых кривых системы $x' = -y$, $y' = x$ (окружностях).

Интегрирование дифференциальных форм

Определение. Первообразной дифференциальной формы ω на области $U \subset N$ называется функция $f : U \to \mathbb{R}$, такая что $\mathrm{d}f = \omega$. Первообразная обозначается $\int \omega$. Форма, имеющая первообразную, называется *точной*. Если у формы ω на линейно связной области U есть первообразная f, то интеграл $\int_a^b \omega$ определяется как $f(b) - f(a)$ для любых a и $b \in U$.

Заметим, что интеграл не зависит от выбора первообразной, так как любые две первообразные различаются на константу (**докажите это!**)

Замечание. Если f – первообразная формы ω, которая не обращается в ноль в U, то все множества уровня первообразной $\{x \mid f(x) = c\} \cap U$ являются решениями уравнения $\omega = 0$.

Утверждение. В 1-мерном пространстве любая непрерывная форма точна.

Доказательство. Пусть x – координатная функция на $\mathbb{R}^1$, и форма ω в этих координатах имеет вид $u\mathrm{d}x$, тогда функция $f(t) = \int_{x_0}^x u(s)\mathrm{d}s$ будет первообразной: ее производная в точке x равна $u(x)$, значит $\mathrm{d}f(x) = u(x)\mathrm{d}x = \omega(x)$. $\square$

Замечание. В двумерном пространстве не любая форма точна, но, любая форма, которая нигде не обнуляется, кратна точной (мы позже докажем это). В пространстве же большего числа измерений не верно и это – соответствующие примеры предложено построить в Листке 2.

Следствие. Если непрерывная форма ω на прямой имеет в координатах вид $u\mathrm{d}x$, то $\int_a^b \omega = \int_a^b u(s)\mathrm{d}s$.

Замечание. Это равенство – не тавтология: в левой части стоит интеграл 1-формы (см. определение выше), а в правой – интеграл Римана непрерывной функции u, и равенство следует из формулы для первообразной, полученной в предыдущем доказательстве.

Теперь объясним на примере системы Лотка-Вольтерра $x' = u(x,y) = x - xy$, $y' = v(x,y) = -y + xy$, как вышесказанное помогает сводить поиск первых интегралов дифференциальных уравнений к уравнениям в дифференциалах, и как решать последние.

1) Фазовые кривые системы $x' = u(x,y) = x - xy$, $y' = v(x,y) = -y + xy$ – это решения уравнения в дифференциалах $(y - xy)\mathrm{d}x + (x - xy)\mathrm{d}y = 0$.

2) Решения уравнения в дифференциалах не изменятся, если домножить его на ненулевую функцию. Разделив на xy, получим $(1/x - 1)\mathrm{d}x + (1/y - 1)\mathrm{d}y = 0$.

3) Получившаяся форма точна, найдем ее первообразную: $\int\big((1/x-1)\mathrm{d}x+(1/y-$

$1)\mathrm{d}y\big) = \int(1/x-1)\mathrm{d}x + \int(1/y-1)\mathrm{d}y = (\ln x - x) + (\ln y - y) + C.$

4) Линии уровня первообразной являются решениями уравнения в дифференциалах, т. е. фазовыми кривыми исходной системы.

Касательное расслоение и векторные поля

Так же как мы определили уравнение в дифференциалах и его решения в абстрактном векторном пространстве, не вводя в нем координаты, т. е. *инвариантно*, определим сейчас инвариантно систему дифференциальных уравнений (автономных, первого порядка). В случае с формами нам понадобилось для этого кокасательное расслоение, а сейчас понадобится касательное. Так как история параллельна предыдущей, мы позволим себе рассказать ее более сжато.

Определение. *t-Росток кривой* в точке x векторного n-мерного пространства N – это отображение $C : (a,b) \to N$, такое что $C(t) = x$. t_1-росток C_1 и t_2-росток C_2 в точке x назовем *эквивалентными*, если $C_1(t+t_1) - C_2(t+t_2) = o(t)$. t_1-Росток C в точке x назовем *дифференцируемым*, если он эквивалентен 0-ростку прямой $C_0(t) = x + t \cdot v$, $v \in N$.

Определение. *Вектор в точке $x \in N$* (не путать с вектором пространства N) – класс эквивалентности дифференцируемых ростков кривых в этой точке. Класс эквивалентности ростка кривой C называется *вектором его скорости* и обозначается C'. Множество всех векторов в точке $x \in N$ называется *касательным пространством* в x и обозначается T_xN. Множество векторов во всех точках называется *касательным расслоением* и обозначается TN.

Замечание. Сопоставление

$$(\text{вектор скорости 0-ростка прямой } x + t \cdot v) \;\leftrightarrow\; v \in N$$

задает биекцию $T_xN = N$, которая индуцирует на T_xN структуру векторного пространства (позволяет складывать и домножать на число вектора в данной точке). Сопоставление

$$(\text{вектор скорости 0-ростка прямой } x + t \cdot v) \;\leftrightarrow\; (x,v) \in N \times N$$

задает биекцию $TN = N \times N$, которая индуцирует на касательном расслоении топологию: для векторного пространства M отображение $M \to TN$ или $TN \to M$ называется непрерывным (а также дифференцируемым, гладким и т. д.), если таковым является композиция этого отображения с биекцией $TN = N \times N$.

Определение. *Векторным полем*, или системой дифференциальных уравнений на области $U \subset N$ называется отображение $v : U \to TN$, такое что $v(x) \in T_xN$ для каждого x. Кривая $C : (a,b) \to N$ называется *решением системы*, или *траекторией*, или *интегральной кривой поля*, если t-росток кривой C имеет вектор скорости $v(C(t))$ при каждом $t \in (a,b)$.

Определение. Биекции $T_x^*N = N^*$ и $T_xN = N$ индуцируют двойственность между пространствами T_x^*N и T_xN, то есть для 1-формы $\alpha \in T_x^*N$ и вектора $v \in T_xN$ определено спаривание $\alpha \cdot v \in \mathbb{R}$. Иными словами, если 1-форму α представить как дифференциал $\mathrm{d}f_x$, а вектор v – как вектор скорости C' для 0-ростка кривой C, то число $\alpha \cdot v$ определяется как значение производной $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(C(t))$ при $t = 0$.

Это спаривание позволяет рассматривать поля 1-форм как функции на TN: значение поля 1-форм ω на векторе v в точке x определяется как $\omega(x) \cdot v$. Аналогично, векторные поля можно рассматривать как функции на T^*N.

Определение. Производной Ли функции f вдоль векторного поля v называется функция $L_v f(x) = v(x) \cdot \mathrm{d}f(x)$. Функция f называется первым интегралом векторного поля v, если $L_v f = 0$.

Производная Ли ведет себя как обычная:

$$L_v(f+g) = L_v(f) + L_v(g),\ L_v(fg) = f \cdot L_v(g) + g \cdot L_v(f),\ \textbf{проверьте!}$$

Векторные поля в координатах

Введем координаты на касательном расслоении и увидим, что в координатах векторное поле, его траектории и его первые интегралы превращаются, соответственно, в систему автономных дифференциальных уравнений первого порядка, ее решения и ее первые интегралы.

Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ – гладкая система координат на N. Тогда функции $(x_1, \ldots, x_n, \mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n)$ образуют систему координат на TN (здесь поля 1-форм $\mathrm{d}x_i$ рассматриваются как функции на TN, см. определение выше).

Определение. Вектором $\frac{\partial}{\partial x_1}$ в точке $a = (a_1, \ldots, a_n)$ называется вектор скорости ростка кривой $C(t) = (a_1 + t, a_2, \ldots, a_n)$, аналогично определяются векторы $\frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Эти векторы образуют в $T_a N$ базис, двойственный базису $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ в $T_a^* N$ (**проверьте!**).

Векторное поле, значение которого в каждой точке равно $\frac{\partial}{\partial x_i}$, также обозначается $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и называется координатным. Если его рассматривать как функцию на кокасательном расслоении T^*N, эта функция совпадает с одноименной координатной функцией, определенной на прошлой лекции, (**проверьте!**).

Замечание. Традиционное обозначение $\frac{\partial}{\partial x_i}$ обманчиво: может показаться, что оно намекает, будто i-е координатное поле однозначно восстанавливается по координатной функции x_i. Однако это не так: в его определении участвуют все координатные функции $(x_1, \ldots, x_n)$. Замена координат не сохраняет поле $\frac{\partial}{\partial x_i}$, даже если сохраняет функцию x_1, см. пример с раздутием точки на прошлой лекции.

Произвольное векторное поле v представляется в виде линейной комбинации $v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}$: чтобы это равенство выполнялось, функцию v_i нужно положить равной производной Ли i-й координатной функции, $v_i = L_v x_i$ (**проверьте аналогично координатной записи 1-форм!**). Функции $v_1, \ldots, v_n$ называются *компонентами* поля v в координатах $(x_1, \ldots, x_n)$, также пишут $v = (v_1, \ldots, v_n)$.

Кривая $C = (c_1, \ldots, c_n)$ является траекторией поля v, если и только если является решением системы

$$c_1' = v_1(c_1, \ldots, c_n),\ \ldots,\ c_n' = v_n(c_1, \ldots, c_n). \qquad (*)$$

Производная Ли функции f вдоль поля v выражается через компоненты поля так: $L_v f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$. В частности, равенство $L_v f = 0$ означает, что f –первый интеграл системы $(*)$. **Проверьте эти урверждения!**

Обратные образы 1-форм и прямые образы векторов

Пусть $F : M \to N$ дифференцируемое отображение векторных пространств.

Определение. 1-форма α в точке $x \in M$ называется *обратным образом (pullback)* 1-формы β в точке $y = F(x) \in N$ и обозначается $f^*\beta$, если для функции f, дифференциал которой в y равен β, дифференциал композиции $f \circ F$ в x равен α.

Определение. Вектор v в точке $y = F(x) \in N$ называется прямым образом вектора u в точке $x \in M$ и обозначается $f_*\omega$, если для 0-ростка кривой C, вектор скорости которого равен u, вектор скорости композиции $F \circ C$ равен v.

Оба этих определения корректны, то есть не зависят от выбора f с данным дифференциалом η и C с данным вектором скорости u, **проверьте!**

Лемма. (1) Если u – вектор в точке $x \in M$ и β – 1-форма в точке $y = F(x)$, то $\beta \cdot F_* u = (F^*\beta) \cdot u$.

Если $x_1, \ldots, x_n$ – координаты в M, и $y_1, \ldots, y_n$ – в N, и отображение $F : M \to N$ записывается в координатах как $y_1 = F_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $y_n = F_n(x_1, \ldots, x_n)$, то

$$(2) \quad F^*(\mathrm{d}y_i) = \frac{\partial F_i}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \quad \text{и} \quad (3) \quad F_*\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) = \frac{\partial F_1}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial y_n}.$$

Доказательство. 1) представим u как вектор скорости 0-ростка кривой C в точке x, а β – как дифференциал $\mathrm{d}g_y$. Тогда обе части доказываемого равенства по их определению равны $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g \circ F \circ C(0)$.

2) Из определений следует (**проверьте!**), что $F^*(\mathrm{d}y_i) = \mathrm{d}(y_i \circ F) = \mathrm{d}(F_i)$. Вычисляя дифференциал F_i в координатах, получаем первую из формул.

3) Пусть $F_*\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) = g_1 \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + g_n \cdot \frac{\partial}{\partial y_n}$, тогда компонента g_j равна $\mathrm{d}y_j \cdot F_*\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)$. Это по пункту 1 равно $(F^*\mathrm{d}y_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$, что по пункту 2 равно $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$. $\square$

Определение. *Обратным образом*, или *прообразом дифференциальной 1-формы* η на векторном пространстве N при дифференцируемом отображении векторных пространств $F : M \to N$ называется форма ω на M, определяемая в каждой точке $b \in M$ как $F^*\eta(F(b))$. Она для краткости обозначается через $F^*\eta$.

Эта операция над полями 1-форм хорошо согласуется с известными:

$$F^*(\eta_1 + \eta_2) = F^*(\eta_1) + F^*(\eta_2), \quad F^*(g \cdot \eta) = (g \circ F) \cdot F^*(\eta), \quad F^*(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(f \circ F) \quad (*)$$

(**докажите эти тавтологии!**)

В координатах прообраз дифференциальной формы вычисляется крайне просто: пусть $(u_1, \ldots, u_n)$ и $(x_1, \ldots, x_m)$ – гладкие системы координат на пространствах N и M соответственно. Запишем в этих координатах отображение F и форму η покомпонентно:

$$u_1 = F_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, u_n = F_n(x_1, \ldots, x_m) \text{ и}$$

$$\eta(u_1, \ldots, u_n) = f_1(u_1, \ldots, u_n)\mathrm{d}u_1 + \ldots + f_n(u_1, \ldots, u_n)\mathrm{d}u_n,$$

тогда для вычисления прообраза $F^*\eta$ нужно заменить все u_i во второй формуле согласно первой формуле:

$$F^*\eta(x_1, \ldots, x_m) = \big(f_1 \circ F\big)(x_1, \ldots, x_m)\mathrm{d}F_1 + \ldots + \big(f_n \circ F\big)(x_1, \ldots, x_m)\mathrm{d}F_n$$

(**докажите это равенство с помощью** $(*)$**!**), где $\mathrm{d}F_i = \frac{\partial F_i}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial x_m}\mathrm{d}x_m$ дифференциал функции $F_i : M \to \mathbb{R}$.

Пример. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^2, 1)$ – отображение прямой в плоскость, тогда $f^*(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) = t^2 \cdot \mathrm{d}t^2 + 1 \cdot \mathrm{d}1 = 2t^3\mathrm{d}t$. Аналогично, для $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, получим $g^*(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) = t\mathrm{d}t - t\mathrm{d}t = 0$.

Последнее обнуление не случайно, потому что g параметризует решение уравнения в дифференциалах $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$ (то есть образ g содержится в решении этого уравнения). Сформулируем эту закономерность в полной общности.

Утверждение. Гладкая гиперповерхность в n-мерном пространстве N, являющаяся образом $(n-1)$-мерного пространства M при гладком отображении $F : M \to N$, будет решением уравнения в дифференциалах $\omega = 0$, если и только если $F^*\omega = 0$.

Мы фактически уже доказали это утверждение в начале лекции для $n = 2$. Полезное (но не строго обязательное) упражнение – найти и изложить доказательство для произвольного n.

Аналогично распространению понятия прообраза с 1-форм на поля 1-форм, можно попытаться распространить понятие прямого образа векторов на векторные поля. Но при этом возникнет проблема.

Определение. Пусть $F : M \to N$ – взаимно однозначное дифференцируемое отображение. Прямым образом поля u на M называется поле N, значение которого в каждой точке $y = F(x) \in N$ определяется как $F_*u(x)$. Это поле обозначается F_*u.

Более коротко, $\Big(F_*u\Big)(y) = F_*u(F^{-1}(y))$. В координатах эта формула записывается так: пусть $x_1, \ldots, x_n$ – координаты в M, и $y_1, \ldots, y_n$ – в N, отображение записывается в координатах как $y_1 = F_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $y_n = F_n(x_1, \ldots, x_n)$, а векторное поле – $u(x) = u_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + u_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$, то

$$\Big(F_*u\Big)(y) = \sum_i u_i(F^{-1}(y))\Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(F^{-1}(y)) \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_i}(F^{-1}(y)) \cdot \frac{\partial}{\partial y_n}\Big)$$

(**выведите это из пункта 3 предыдущей леммы!**)

Пример. Прямой образ векторного поля $e^x\frac{\partial}{\partial x}$ при отображении $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $f(x) = x^3$, в точке y равен $e^{\sqrt[3]{y}}\frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt[3]{y}) \cdot \frac{\partial}{\partial y} = 3y^{\frac{2}{3}}e^{\sqrt[3]{y}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}$. Заметим, что гладкое поле перешло в негладкое, и что получившееся поле обращается в некоторой точке в ноль, хотя исходное не обращалось. Если бы f было диффеоморфизмом, такого бы быть не могло (**проверьте!**).

Конспект лекции 4

Овладев языком дифференциальных уравнений на лекциях и приемами их решения на семинарах, перейдем к содержательной части. Эта лекция посвящена существованию и единственности решений.

Принцип детерминизма

Он гласит, что, если мы знаем начальное состояние замкнутой системы и закон, по которому она меняется, то можем однозначно предсказать ее состояние в любой последующий момент времени. Применительно к дифференциальным уравнениям это означает, что, если мы знаем уравнение $x' = f(x,t)$ и начальное значение его решения $x(t_0) = x_0$, то вправе ожидать, что можем однозначно предсказать по имеющимся данным и все последующие значения этого решения $x(t)$, $t > t_0$.

Пример. Если в момент времени $t = 1$ в лесу было 10 зайцев, численность которых меняется по закону $x' = x$, то сколько зайцев будет в момент $t = 5$? Решение уравнения имеет вид $x(t) = Ce^t$ и при $t = 1$ удовлетворяет начальному условию $10 = Ce^1$, поэтому константа C равна $10/e$, поэтому искомая величина $x(10)$ равна $10/e \cdot e^5 = 10e^4 \approx 546$ зайцев.

Определение. Задача о поиске решения уравнения $x' = f(x,t)$, удовлетворяющего начальному условию $x(t_0) = x_0$, называется *задачей Коши*.

Замечание. Все вышеописанное применимо не только к уравнениям $x' = f(x,t)$, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, но и к системам уравнений, записанным в векторной форме $x' = f(x,t)$, $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Например, система $x' = y$, $y' = -x$ записывается в векторной форме так: $(x,y)' = (-y,x)$.

Пример. Вопреки ожидаемому детерминизму, решение задачи Коши далеко не всегда существует и далеко не всегда единственно. Рассмотрим, например, уравнение $x' = x^2$ с начальным условием $x(0) = 1$. Методом разделения перменных находим все его решения: $x(t) = -\frac{1}{t-c}$ для любой константы $c \in \mathbb{R}$. Начальное условие $x(0) = 1$ определяет константу $c = 1$, но получившееся решение $x(t) = \frac{1}{1-t}$ определено не при всех $t \in \mathbb{R}$, а только на луче $(-\infty, 1)$. С другой стороны, рассмотрим уравнение $x' = 3x^{\frac{2}{3}}$ с начальным условием $x(0) = 0$. У такой задачи Коши есть как нулевое решение $x(t) = 0$, так и ненулевое $x(t) = t^3$.

Первая из двух обнаруженных неприятностей на самом деле не существует: решение определено и при $t = 1$, просто оно там равно ∞. Позже мы придадим этому утверждению математический смысл. Вторая неприятность объясняется тем, что функция $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ в правой части не гладкая, и поэтому "не имеет физического смысла". Сейчас мы докажем, что для гладкой правой части решение задачи Коши всегда единственно. Для этого нужно следующее

Определение. Функция $f = f(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^m$, называется *липшицевой* по переменной x в области $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, если существует константа C, такая что для любой пары точек a и b в U и $t \in V$ имеем $|f(a,t) - f(b,t)| < C|a - b|$.

Пример. Липшицевость функций $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$. Любая непрерывно дифференцируемая функция липшицева на любом отрезке (**докажите это!**), но не любая – на $\mathbb{R}$ (например, $f(x) = x^2$ – **докажите это!**). Функция $f(x) = |x|$ не

дифференцируема, но на липшицева на $\mathbb{R}$ (**докажите это!**). Любая разрывная функция не липшицева (**докажите это!**). Функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна, но не липшицева на $(0, +\infty)$ (**докажите это!**).

Теорема Пикара-Линделёфа

Теорема. Если $f = f(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$, непрерывна и липшицева по x в окрестности точки (x_0, t_0), то задача Коши $x' = f(x,t)$, $x(t_0) = x_0$, имеет единственное решение на интервале $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Замечание. Заметьте, что в примере неединственности решения задачи Коши правая часть не липшицева. С другой стороны существование решения с липшицевостью не связано: теорема Пеано утверждает, что для существования решения достаточно непрерывности правой части.

Доказательство теоремы Пикара-Линделефа основано на *принципе сжимающих отображений*, который мы сначала продемонстрируем на "игрушечном" примере.

Пример. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *сжимающая*, то есть липшицева с константой $C < 1$. Тогда уравнение $x = f(x)$ имеет единственное решение, и к этому решению при любом x_0 сходится последовательность $x_n = \underbrace{f\Big(f\big(\ldots f(}_{n} x_0)\ldots\big)\Big)$.

Действительно:

1) если бы были два решения $a \neq b$, в них бы нарушалась Липшицевость: $|a - b| = |f(a) - f(b)|$ противоречит $|f(a) - f(b)| < C|a - b|$.

2) последовательность (x_n) сходится, так как фундаментальна: неравенство $|x_{n+1} - x_n| < |x_1 - x_0|C^n$ следует по индукции из $|x_{n+1} - x_n| < C|x_n - x_{n-1}|$.

3) предел $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ является решением:

$$f(a) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a.$$

С помощью этой идеи мы докажем существование и единственность неподвижной точки следующего *автоморфизма Пикара* пространства $\mathcal{C}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], U)$ (непрерывные функции из $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ в U):

$$F(\varphi) = \psi, \text{ такая что } \psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\mathrm{d}s.$$

Это докажет и теорему Пикара-Линделефа, потому что решения задачи Коши в ее формулировке – это неподвижные точки F (дифференциальное уравнение заменяется интегральным $F(\varphi) = \varphi$).

Более подробно, наш план состоит в следующем. Предположим, что функция f в условии теоремы Пикара-Линделефа непрерывна и липшицева с константой C по переменной x в области $U \times [t_0 - r, t_0 + r]$, где U – это R-окрестность точки x_0. Обозначим через M максимум $|f|$ на $U \times [t_0 - r, t_0 + r]$.

I) Для достаточно малого ε автоморфизм Пикара переводит пространство $\mathcal{C}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], U)$ в себя.

II) Для достаточно малого ε автоморфизм Пикара является сжимающим отображением.

III) Если ε таково, что автоморфизм Пикара F сжимающий, то уравнение $F(\varphi)=\varphi$ имеет единственное решение, являющееся пределом *итераций Пикара*

$$\varphi_k = \underbrace{F\Big(F\big(\ldots F(}_{k} x_0)\ldots\big)\Big). \qquad (*)$$

IV) Уравнение $F(\varphi)=\varphi$ и задача Коши $x'=f(x,t)$, $x(t_0)=x_0$, имеют одни и те же решения.

Доказательство (I). Если $\varepsilon \leqslant \min(R/M, r)$, то при $\varphi \in \mathcal{C}([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon], U)$ и $|t-t_0|<\varepsilon$ получим $\left|\int_{t_0}^{t} f(\varphi(s),s)\mathrm{d}s\right| < M\varepsilon < R$, то есть $F\big(\varphi\big)(t) = x_0 +$ (нечто, меньшее R) $\in U$. Значит, $F(\varphi)$ также принадлежит пространству $\varphi \in \mathcal{C}([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon], U)$.

Доказательство (II). Автоморфизм $F: S \to S$ нормированного пространства S с нормой $|\cdot|$ называется C-*сжимающим* относительно этой нормы, $C \in (0,1)$, если $|F(a)-F(b)| < C|a-b|$ при любых a и b.

При условии $\varepsilon \leqslant 1/L$ докажем, что автоморфизм Пикара будет сжимающим относительно нормы $|\varphi|_\infty = \sup_{|t-t_0|<\varepsilon} |\varphi(t)|$ на пространстве $\mathcal{C}([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon], U)$:

$$|F(\varphi)(t)-F(\psi)(t)| = |\int_{t_0}^{t} \big(f(\varphi(s),s)-f(\psi(s),s)\big)\mathrm{d}s| \leqslant \int_{t_0}^{t} \big|f(\varphi(s),s)-f(\psi(s),s)\big|\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} L\big|\varphi(s)-\psi(s)\big|\mathrm{d}s \leqslant \varepsilon L|\varphi-\psi|_\infty.$$

Значит $|F(\varphi)-F(\psi)|_\infty < L|\varphi-\psi|_\infty$, то есть автоморфизм F является (εL)-сжимающим.

Доказательство (III). Если $F: S \to S$ – C-сжимающий автоморфизм нормированного пространства, у него может не быть неподвижных точек, **приведите пример!** Однако,

Утверждение. Если пространство S *полное* (то есть фундаментальные последовательности в нем сходятся), то его C-сжимающий автоморфизм имеет ровно одну неподвижную точку, к которой последовательность $x_k = F(x_{k-1})$ сходится быстрее геометрической прогрессии $\sum_k C^k$ при любом x_0.

Доказательство дословно повторяет игрушечный пример применения метода сжимающих отображений и было дано в курсе Анализа-1. В том же курсе было доказано, что пространство $\mathcal{C}([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon], U)$ полно относительно нормы $|\varphi|_\infty$. Поэтому, применяя предыдущее утверждение к автоморфизму Пикара, получим, что он имеет единственную неподвижную точку, к которой сходятся итерации Пикара $(*)$, причем быстрее геометрической прогрессии $\sum_k (\varepsilon L)^k$.

Доказательство (IV). Интегрируя по отрезку $[t_0,t]$ обе части равенства $x'=f(x,t)$ (правая часть непрерывна, поэтому обе интегрируемы!), получим $x(t)+C = \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\mathrm{d}s$, а подставляя в обе части $t=t_0$ – получим из начального условия $x(t_0)=x_0$, что $C=-x_0$, то есть $x=F(x)$. Обратно, дифференцируя обе части равенства $x=F(x)$ (правая часть является первообразной непрерывной функции, значит обе части дифференцируемы!), получим $x'=f(x,t)$, а подставляя в обе части $t=t_0$ – получим начальное условие $x(t_0)=x_0$.

Сформулируем еще раз более подробно доказанную нами теорему:

Теорема. (Пикар-Линделёф) Пусть $f = f(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$, непрерывна и липшицева по x в области $U \times [t_0 - r, t_0 + r]$, где U – это R-окрестность точки x_0. Обозначим липшицеву константу и максимум модуля функции f на указанной области через L и M соответственно. Тогда для любого $\varepsilon \leqslant \min(r,\, M/R,\, 1/L)$ задача Коши $x' = f(x,t)$, $x(t_0) = x_0$, имеет единственное решение на интервале $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. При этом итерации Пикара $(*)$ сходятся к этому решению быстрее прогрессии $\sum_k (\varepsilon L)^k$, то есть $\sup |\varphi_k - \varphi_{k-1}| < (\varepsilon L)^k$.

Замечание. Часть предположений в этой теореме можно опустить. Во-первых, все утверждения, кроме сходимости итераций Пикара, остаются верными для $\varepsilon \leqslant \min(r,\, M/R)$ (верхняя граница не зависит от константы Липшица функции f). Во-вторых, утверждение о существовании решения остается верным для всех непрерывных функций f (не только для Липшицевых). Мы не будем доказывать эти уточнения.

Билет к коллоквиуму за 1 модуль состоит из двух вопросов (оценка 0–4 за каждый) и примера (оценка 0–3).

Варианты первого вопроса к коллоквиуму

(См. также §§7, 14, 11 в `www.dyn-sys.org/public/ODE-notes/ODEprint.pdf`)

1. Определение поля 1-форм в вещественном конечномерном векторном пространстве. Операции над полями 1-форм (сумма, умножение на функцию, обратный образ). Дифференциал функции.

2. Компоненты поля 1-форм в системе координат. Компоненты суммы форм, обратного образа формы, дифференциала функции.

3. Определение векторного поля в вещественном конечномерном векторном пространстве. Операции над векторными полями (сумма, умножение на функцию, прямой образ при диффеоморфизме). Производная функции вдоль поля.

4. Компоненты векторного поля в системе координат. Компоненты суммы полей, прямого образа поля при диффеоморфизме, формула для производной функции вдоль поля в координатах.

5. Фазовая кривая системы дифференциальных уравнений, интегральная гиперповерхность уравнения в дифференциалах. Фазовые кривые системы $x' = u$, $y' = v$ являются интегральными кривыми уравнения $v\mathrm{d}x - u\mathrm{d}y = 0$.

Варианты второго вопроса к коллоквиуму

(См. также `www.dyn-sys.org/public/ODE-notes/existUnique.pdf`)

1. Липшицевы функции. Липшицевость дифференцируемых функций. Формулировка теоремы Пикара-Линделефа.

2. Автоморфизм Пикара. Сведение задачи Коши к поиску неподвижных точек автоморфизма Пикара.

3. Автоморфизм Пикара – сжимающее отображение.

Варианты примера к коллоквиуму (Вы должны уметь объяснить математический смысл всех промежуточных вычислений в обосновании примера).

1. Приведите пример дифференциального уравнения с непрерывной правой частью, для которого не выполняется единственность решения задачи Коши. Найдите все его решения.

2. Приведите пример гладкого векторного поля на плоскости, у которого нет непостоянных первых интегралов. Докажите их отсутствие.

3. Приведите пример гладкого автономного дифференциального уравнения первого порядка одной переменной, у которого нет ни одного решения, определенного на всей числовой прямой.

4. Приведите пример дифференцируемой функции $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ и дифференцируемого векторного поля u на $\mathbb{R}^1$, такого что поле f_*u не дифференцируемо (с доказательством недифференцируемости).

Конспект лекции 5

На этой лекции мы применим теорему Пикара-Линделефа в простейшем случае – к системе линейных автономных дифференциальных уравнений. Это позволит описать все ее решения, или, выражаясь более инвариантном языком, описать все однопараметрические подгруппы в матричных группах.

Определение. *Система линейных дифференциальных уравнений 1го порядка с постоянными коэффициентами* с матрицей A – система вида

$$x' = A \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{$*$}$$

где A – матрица $n \times n$.

Утверждение. 1) Для любого $a \in \mathbb{R}^n$ функция $x_a(t) = e^{tA} \cdot a$ является решением системы $(*)$ с начальным условием $x_a(0) = a$.

2) У системы $(*)$ нет других решений.

Доказательство. Так как ряд $x_a(t) = e^{tA} \cdot a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k a}{k!}$ сходится равномерно, его можно почленно продифференцировать: $x_a'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^k a}{(k-1)!} = A \cdot e^{tA} \cdot a$, поэтому x_a – решение. Докажем, что любое решение $x(\cdot)$ однозначно определяется своим начальным значением $x(0)$, и поэтому совпадает с $e^{tA} \cdot x(0)$. Действительно, пусть есть два решения x и y, для которых $x(0) = y(0)$, но $x(t) \neq y(t)$ для какого-то $t > 0$. Выбрав точную нижнюю грань t_0 всех таких t, получим, что $x(t_0) = y(t_0)$, но $x \neq y$ в сколь угодно малой окрестности t_0, что противоречит теореме Пикара-Линделефа о единственности решения в окрестности точки t_0. $\square$

См. также подробнее в `www.dyn-sys.org/public/ODE-notes/exponent.pdf` и вычисление e^{tA} в `www.dyn-sys.org/public/ODE-notes/exponent-calculation.pdf`

Пример. Все решения системы $\begin{cases} x'=y \\ y'=-x \end{cases}$ имеют вид $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos t + b\sin t \\ b\cos t - a\sin t \end{pmatrix}$.

Следствие. Решения системы $(*)$ образуют n-мерное векторное подпространство в пространстве всех функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Мы укажем два важных приложения полученного результата: решение линейных автономных дифференциальных уравнений высших порядков и описание однопараметрических подгрупп в матричных группах.

Линейные автономные уравнения высших порядков

Определение. *Дифференциальное уравнение порядка n* – уравнение вида $x^{(n)} = f(x^{(n-1)}, \ldots, x', x, t)$. Задача Коши порядка n – задача поиска решения уравнения порядка n, удовлетворяющего начальным условиям $x(0) = c_0$, $x'(0) = c_1, \ldots, x^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$.

Эта задача Коши сводится к задаче Коши для системы уравнений первого

порядка:

$$\begin{array}{l} x' = x_1 \\ x_1' = x_2 \\ \dots \\ x_{n-2}' = x_{n-1} \\ x_{n-1}' = f(x_{n-1}, \dots, x_1, x, t) \end{array} \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ x_1(0) \\ \dots \\ x_{n-1}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c_1 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Следствие. Задача Коши уравнения порядка n с n раз непрерывно дифференцируемой правой частью имеет единственное решение.

Пример. Расширяя все решения $x : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ уравнения $x'' + x = 0$ до вектор-функций $(x, y) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$, $y(t) = x'(t)$, получим все решения системы из предыдущего примера.

Определение. *Линейное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами* – уравнение вида

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = g(t). \qquad (**)$$

Здесь $x^{(k)}$ – k-я производная функции x. Оно называется однородным, если правая часть равна 0.

Однородное уравнение $(**)$ сводится описанным выше приемом к системе линейных уравнений вида $(*)$.

Замечание. Множество решений однородного уравнения $(**)$ образует векторное подпространство в пространстве всех функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Так как по предыдущему следствию это пространство находится во взаимно однозначном соответствии с пространством начальных условий задачи Коши, то оно n-мерно.

Сейчас мы угадаем все решения однородного уравнения $(**)$.

Определение. *Характеристическими числами* уравнения $(**)$ называются корни *характеристического уравнения* $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$.

Определение. *Квазимономами* степени k с показателем $a \pm ib$ (более коротко, $(k,\, a \pm ib)$-квазимономами) называются функции $t^k e^{at} \sin(bt)$ и $t^k e^{at} \cos(bt)$. Линейная комбинация квазимономов называется квазимногочленом.

Пример. Все компоненты решения линейной системы $x' = Ax$ – квазимногочлены с показателями, равными характеристическим числам матрицы A.

Утверждение. Решения однородного уравнения $(**)$ – линейные комбинации $(k,\, \lambda)$-квазимономов, таких что λ – характеристическое число уравнения $(**)$ кратности больше k.

Доказательство. Будем называть квазимономы, описанные в утверждении, *нужными*. Заметим, что все решения уравнения $(**)$ являются линейными комбинациями нужных квазимономов: действительно, уравнение эквивалентно линей-

ной системе первого порядка с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix},$$

а это – клетка Фробениуса для многочлена $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, поэтому собственные значения A – корни этого многочлена (см. курс Алгебра-1), поэтому решения системы состоят из линейных комбинаций нужных квазимономов (см. предшествующий пример), поэтому такой же вид имеет и любое решение уравнения $(**)$. Таким образом имеем вложение:

$$\{\text{решения однородного уравнения } (**)\} \subset \{\text{комбинации нужных квазимономов}\}$$

Заметим, что первое из этих пространств n-мерное (см. предшествующее замечание), а второе – не более чем n-мерное, потому что число пар $(k,\, \lambda)$, таких что λ – характеристическое число кратности больше k, равно степени характеристического уравнения, то есть n. Поэтому вложение является равенством. Два (нетривиальных) следствия этого равенства – (1) все решения являются комбинациями нужных квазимономов, и (2) размерность второго пространства равна n, то есть порождающие его квазимономы линейно независимы. $\square$

Резонанс

Утверждение. Среди решений неоднородного уравнения $(**)$, в котором правая часть – $(m,\, \beta)$-квазимоном, есть линейная комбинация квазимономов с показателем β степеней $k \leqslant m +$ (кратность β как характеристического числа).

Доказательство аналогично и может быть найдено в любом учебнике, например `http://www.dyn-sys.org/public/ODE-notes/LinearSystems.pdf`

Замечание. Это позволяет решать уравнения вида $(**)$ с произвольным квазимногочленом в правой части, потому что неоднородные линейные дифференциальные уравнения можно сводить к однородным так же, как и обычные линейные: обозначим левую часть уравнения $(**)$ через Lx, тогда

$$\{\text{все решения } Lx = g_1 + \ldots + g_k\} = \{\text{все решения } Lx = 0\} + \\ +(\text{одно решение } Lx = g_1) + \ldots + (\text{одно решение } Lx = g_k)$$

Пример. Чтобы решить уравнение $x'' + x = \cos\sqrt{17}t$ (математический маятник раскачивают не в резонанс), прибавим какое-нибудь его решение ко всем решениям однородного $x'' + x = 0$. Так как характеристические числа однородного равны $\pm i$, все его решения являются линейными комбинациями $(0,\, \pm i)$-квазимономов, то есть имеют вид $a\cos t + b\sin t$. Так как $\sqrt{-17}$ имеет кратность 0 как характеристическое число, то некоторое решение неоднородного уравнения является линейной комбинацией $(0, \sqrt{-17})$-квазимономов, то есть имеет вид $c\cos\sqrt{17}t + d\sin\sqrt{17}t$ для подходящих чисел c и d, которые нужно найти. Подставляя $x(t) = c\cos\sqrt{17}t + d\sin\sqrt{17}t$ в уравнение, получаем $-16c = 1$ и $d = 0$, поэтому все решения уравнения $x'' + x = \cos\sqrt{17}t$ имеют вид $a\cos t + b\sin t - \frac{1}{16}\cos\sqrt{17}t$. Они ограничены.

Аналогично, решение уравнения $x'' + x = \cos t$ (математический маятник раскачивают в резонанс) нужно искать в виде линейной комбинации $(1, \pm i)$-квазимономов, то есть в виде $ct\cos t + dt\sin t$, потому что правая часть уравнения является квазимономом с показателем i, который имеет кратность 1 как характеристическое число. Найдя $c = 0$ и $d = 1$, получаем, что все решения уравнения $x'' + x = \cos t$ имеют вид $a\cos t + b\sin t + t\sin t$. Они неограничены (маятник раскачивается все сильнее).

Однопараметрические подгруппы матричных групп

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{n\times n}$ наборов n^2 вещественных чисел как пространство всех вещественных матриц размера $n \times n$.

Определение. *Общей линейной группой* GL_n называется множество всех невырожденных вещественных матриц размера $n \times n$ с операцией умножения. Это открытое подмножество в пространстве всех матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$. Касательное пространство $T_E GL_n$ в единичной матрице $E \in GL_n$ называется *алгеброй Ли* этой группы и обозначается через $\mathfrak{gl}_n$. Оно обычно отождествляется с пространством всех матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$: каждой матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ставится в соответствие вектор скорости $\varphi'(0)$ кривой $\varphi(t) = E + tA$.

Определение. *Однопараметрической подгруппой* группы GL_n называется гладкий гомоморфизм $\mathbb{R} \to GL_n$ (не путать с гомеоморфизмом!).

Теорема. Для любой матрицы $A \in \mathfrak{gl}_n$ отображение $\varphi : \mathbb{R} \to GL_n$, $\varphi(t) = e^{tA}$, является однопараметрической подгруппой, и других не существует.

Для доказательства первой части напомним равенство

$$e^A e^B = E^{A+B} \qquad (***)$$

для коммутирующих матриц (то есть таких, что $AB = BA$). Оно следует из определения экспоненты через степенной ряд: $\sum_i \frac{A^i}{i!} \sum_j \frac{B^j}{j!} = \sum_k \sum_{i+j=k} \frac{A^i B^j}{i!j!} = \sum_k \frac{1}{k!} \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} A^i B^j = \sum_k \frac{(A+B)^k}{k!}$ (**где тут использована коммутативность?**).

Замечание. Если A и B не коммутируют, равенство $(***)$ может не выполняться. **Придумайте пример!**

Доказательство гомоморфности. Так как tA и sA коммутируют, получаем $e^{(s+t)A} = e^{sA+tA} = e^{sA}e^{tA}$.

Доказательство единственности. Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to GL_n$ – гладкий гомоморфизм, такой что $\varphi'(0) = A$. Докажем, что $\varphi(t) = e^{tA}$. Действительно, подставляя в определение гомоморфности $\varphi(s + t) = \varphi(t)\varphi(s)$ определение касательного вектора $\varphi(s) = E + sA + o(s)$, получаем $\varphi(s + t) = \varphi(t) + s\varphi(t)A + o(s)$, то есть $\varphi'(t) = \varphi(t)A$, то есть кривая φ является решением автономной системы линейных уравнений $X' = X \cdot A$ с начальным условием $\varphi(0) = E$. По теореме Пикара-Линделефа известное нам решение этой задачи $X(t) = e^{tA}$ является единственным.

Замечание. Система уравнений $X' = X \cdot A$ называется *левоинвариантным векторным полем* на GL_n. Название объясняется тем, что это векторное поле $v(X) = XA$ сохраняется при *диффеоморфизмах левых сдвигов* $L_B(X) = BX$, то есть выполняется равенство $(L_B)_* v = v$. **Проверьте это!**

Конспект лекции 6

Помимо ранее рекомендованного учебника “Обыкновенные дифференциальные уравнения” Буфетова, Гончарук и Ильяшенко `www.dyn-sys.org/wiki/Курсы_в_МГУ/ОДУ_осень_2011`, материал второго модуля нужно изучать по одноименному учебнику Арнольда (доступен в папке с домашним заданием `drive.google.com/folderview?id=0By7XUkn5_e01Z2F5Sy1PSFdkQ3c&usp=sharing`). После этой лекции там можно прочитать про уравнение в вариациях и про выпрямление векторных полей.

Зависимость от начальных условий

Следующий естественный вопрос после существования и единственности решения задачи Коши: каков характер зависимости этого решения от начальных данных задачи Коши? Может ли это решение изменяться скачками при непрерывном изменении начальных данных? Если нет, то с какой скоростью оно будет меняться? Чтобы ответить на эти вопросы, зафиксируем компактное множество $U \subset \mathbb{R}^n$, в пределах которого мы позволим меняться начальному условию задачи Коши, и предположим, что теорема Пикара-Линделефа применима к задачам Коши со всеми возможными начальными условиями из U.

Более точно, мы предположим, что существуют положительные константы δ, r и L, такие что функция $f = f(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$, непрерывна и липшицева по x в области (δ-окрестность U) $\times [t_0 - r, t_0 + r]$. Обозначим липшицеву константу и максимум модуля функции f на указанной области через L и M соответственно, и выберем положительное $\varepsilon < \min(r, M/\delta, 1/L)$. Тогда теорема Пикара-Линделефа применима к задаче Коши $x' = f(x,t)$, $x(t_0) = a$, для каждого начального условия a из области $U \subset \mathbb{R}^n$: у этой задачи существует и единственно решение $x_a : [t_0, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$. Удобно сформулировать этот вывод в следующих обозначениях:

Определение. Переобозначив $x_a(t)$ через $x(a,t)$, получим отображение $x : U \times [t_0, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$, называемое *общим решением* дифференциального уравнения $x' = f(x,t)$ на интервале $[t_0, t_1]$ *над областью начальных условий* U. *Общими итерациями Пикара* для этого уравнения назовем последовательность функций $x_k : U \times [t_0, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$, заданную рекуррентно формулой

$$x_{k+1}(a,t) = a + \int_{t_0}^{t} f(x_k(a,s), s)\mathrm{d}s,\ x_0(a,t) = a. \qquad (*)$$

Пример. Если $f(x,t) = A \cdot x$, то $x(a,t) = e^{tA} \cdot a$, и $x_k(a,t) = (E + tA + \ldots + \frac{(tA)^k}{k!}) \cdot a$.

Теорема. (общий Пикар-Линделёф) Пусть функция f непрерывна и липшицева по x в области ($\delta-$окрестность U) $\times [t_0 - r, t_0 + r]$. Обозначим липшицеву константу и максимум модуля функции f на указанной области через L и M соответственно, и выберем положительное $\varepsilon < \min(r, M/\delta, 1/L)$. Тогда уравнение $x' = f(x,t)$ имеет единственное общее решение на интервале $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ над U. При этом итерации Пикара $(*)$ сходятся к этому решению быстрее прогрессии $\sum_k (\varepsilon L)^k$, то есть $\sup |x_k - x_{k-1}| < (\varepsilon L)^k$.

Вопрос о зависимости решения задачи Коши от начальных условий теперь можно сформулировать так: непрерывно ли общее решение? Дифференцируемо ли? Если да, то как искать его частные производные?

Теорема. В условиях прошлой теоремы общее решение непрерывно.

Доказательство. По теореме Пикара-Линделефа общее решение является пределом последовательности $(*)$ непрерывных функций в смысле нормы $|\varphi|_\infty = \sup|\varphi|$, поэтому и само непрерывно.

Замечание. С дифференцируемостью так уже не получится, так как дифференцируемые функции могут сходиться по этой норме к недифференцируемой функции.

Дифференцирование по начальному условию

Сначала обрисуем, чего хотим получить, на физическом уровне строгости, а потом с аккуратными формулировками и доказательствами.

Физический уровень строгости. Рассмотрим дифференциальное уравнение $x' = f(x,t)$, имеющее нулевое решение $x_0(t) = 0$ (то есть $f(0,t) = 0$). Для каждого малого начального условия a оно также имеет ненулевое решение $x_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x_a(0) = a$. Нас интересует, как по начальному значению такого решения $x_a(0) = a$ узнать в первом приближении его значение $x_a(t)$ в другой момент времени t. Иными словами, хочется выделить линейную часть $x_a(t) = Y(t) \cdot a + o(|a|)$ и найти задающую ее $n \times n$-матрицу Y. Априори мы знаем только, что $Y(0) = E$. (**Откуда?**)

Пример. Рассмотрим уравнения *физического маятника* $x' = v$, $v' = -\sin x$ (здесь x и v – положение и скорость маятника, первое уравнение – определение скорости, а второе – второй закон Ньютона). Они имеют частное решение $x(t) = v(t) = 0$ с начальным условием $(0,0)$ (маятник висит неподвижно), но другие их решения (маятник раскачивается с ненулевой амплитудой h) в элементарных функциях не выражается. Тем не менее, нам хочется найти их хотя бы в первом приближении. Более точно, обозначая через (x_h, v_h) раскачивание с амплитудой h (то есть решение задачи Коши $x' = v$, $v' = -\sin x$, $x(0) = h$, $v(0) = 0$), мы хотим найти столбец $y = y(t)$, такой что $\binom{x_h}{v_h} = hy + o(h)$.

Идея состоит в следующем: выделим линейную часть у исходного уравнения: $f(x,t) = A(t) \cdot x + o(|x|)$, где $A(t)$ – $n \times n$-матрица частных производных $\frac{\partial f_i}{\partial a_j}(0,t)$ (**а почему матрица линейной части состоит из частных производных?**). Физическая интуиция должна нам подсказывать, что линейная часть решения исходного уравнения (обозначенная выше через Y) сама будет решением линейной части исходного уравнения $x' = f(x,t) = A(t) \cdot x + o(|x|)$:

$$Y'(t) = A(t) \cdot Y(t). \tag{1}$$

Это уравнение также называется *линеаризацией* уравнения $x' = f(x,t)$, или *уравнением в вариациях*.

Продолжение примера. Линеаризация уравнений физического маятника $x' = v$, $v' = -\sin x = -x + o(x)$ – это уравнения *математического маятника* $\tilde{x}' = \tilde{v}$, $\tilde{v}' = -\tilde{x}$. Они, в отличие от исходных, легко решаются: $\binom{\tilde{x}_h}{\tilde{v}_h} = Y(t) \cdot \binom{h}{0} = e^{t\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} \cdot \binom{h}{0} = h\binom{\cos(t)}{\sin(t)}$, и их решение, согласно физической интуиции, будет линеаризацией решения физического маятника $\binom{x_h}{v_h} = h\binom{\cos(t)}{\sin(t)} + o(h)$. В частности,

частота колебаний физического маятника, которая, вообще говоря, не выражается в элементарных функциях (она является эллиптическим интегралом), при малых амплитудах будет примерно равна частоте $1/2\pi$ математического маятника.

Замечание. Все то же самое работает и для уравнения $x' = f(x,t)$, у которого нет решения $x_0(t) = 0$, но известно какое-то другое решение x_{a_0}, $x_{a_0}(0) = a_0$, и мы хотим найти в первом приближении близкие решения x_{a_0+a} для малых a. Заметим, что разности $z_a = x_{a_0+a} - x_{a_0}$, удовлетворяют уравнению $z' = f\big(z + x_{a_0}(t), t\big) - f\big(x_{a_0}(t), t\big)$; обозначим его правую часть через $g(z,t)$. Так как это уравнение имеет нулевое решение $z_0(t) = 0$, к нему применимы предыдущие рассуждения: выделяя линейные части $z_a(t) = Y(t)\cdot a + o(|a|)$ и $g(x,t) = A(t)\cdot x + o(|x|)$, получим уравнение в вариациях (1). В нем элементы матрицы A – частные производные функции $g(z,t) = f\big(z + x_{a_0}(t), t\big) - f\big(x_{a_0}(t), t\big)$ по z при $z = 0$, то есть

$$A(t) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_{a_0}(t), t)\right). \tag{2}$$

Математический уровень строгости.

Оказывается, физическая интуиция нас не подвела: решения уравнения $x' = f(x,t)$ будут в первом приближении решениями уравнения в вариациях (1) с матрицей (2). Точная формулировка такова:

Теорема о линеаризации. Пусть функция $f = f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, дважды непрерывно дифференцируема в области ($\delta-$окрестность U) $\times\, [t_0 - r, t_0 + r]$. Обозначим максимум модуля f и нормы $\mathrm{d}f$ на указанной области через M и L соответственно и выберем $\varepsilon \leqslant \min(r, \delta/M,\, 1/L)$. Тогда

1) уравнение $x' = f(x,t)$ имеет единственное общее решение x на интервале $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ над U,

2) это общее решение непрерывно дифференцируемо, и

3) его частные производные $Y = \left(\frac{\partial x(a,t)}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial x(a,t)}{\partial a_n}\right)$ удовлетворяют уравнению в вариациях (1) с матрицей (2).

Доказательство теоремы. Пункт 1 следует из теоремы Пикара-Линделефа, так как функция f является L-липшицевой. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ – итерации Пикара, сходящиеся к общему решению x уравнения $x'(a,t) = f(x(a,t),t)$, $x(a,0) = a$ (штрих означает дифференцирование по t). Рассмотрим также задачу Коши

$$\tilde{x}'(a,t) = f(\tilde{x}(a,t),t),\ \tilde{y}'(a,t) = A(a,t)\cdot\tilde{y}(a,t),\ \tilde{x}(a,0) = 0,\ \tilde{y}(t_0) = E,$$

где $A(a,t)$ – $n\times n$-матрица частных производных $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x(a,t),t)$, а неизвестные функции $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ – столбец высоты n и $n\times n$-матрица соответственно. Эта задача по условию удовлетворяет предположениям теоремы Пикара-Линделефа (**почему?**), значит ее итерации Пикара $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$, $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$, $\ldots$ сходятся к ее общему решению $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Заметим, что в силу определения итераций Пикара при любом i имеем равенства $x_i = \tilde{x}_i$ и $\tilde{y}_i = (\frac{\partial \tilde{x}_i(a,t)}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial \tilde{x}_i(a,t)}{\partial a_n})$. При $i = 0$ оба они – тавтологии, а при $i > 0$ следуют по индукции с помощью линейности оператора Пикара (**проверьте!**). Из них следует, что $\tilde{y}_i = (\frac{\partial x_i(a,t)}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial x_i(a,t)}{\partial a_n})$. Применим теорему из анализа:

Теорема. Если последовательность дифференцируемых функций x_i сходится по норме $|\cdot|_\infty$ к x, а последовательность производных $y_i = x_i'$ сходится по норме $|\cdot|_\infty$ к y, то функция x дифференцируема, и ее производная равна y.

В нашей ситуации это означает, что предел $x = \lim x_i$ имеет частные производные, и $\tilde{y} = (\frac{\partial x(a,t)}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial x(a,t)}{\partial a_n})$, то есть решение уравнения в вариациях совпадает с матрицей частных производных общего решения исходного уравнения.

Осталось доказать, что общее решение непрерывно дифференцируемо или, что то же самое, имеет непрерывные частные производные. Для производных по a_i это следует из того, что они являются решениями уравнения в вариациях. Для производной по t это следует из самого уравнения $\frac{\partial x}{\partial t} = f(x,t)$. $\square$

Дальше мы увидим, что решения линеаризованной системы не только приближают решения исходной системы количественно, но во многих случаях и качественно ведут себя так же. Чтобы это увидеть, переформулируем теорему существования и единственности для векторных полей.

Эквивалентность и нормальные формы векторных полей

В первом модуле мы в основном учились решать дифференциальные уравнения символьно, а в этом будем учиться исследовать качественные свойства уравнений, которые не решаются явно. Мы сосредоточимся на системах автономных уравнений первого порядка с дважды непрерывно дифференцируемой правой частью, то есть на гладких векторных полях. Примеры качественных вопросов: существуют ли у поля ограниченные/неограниченные/замкнутые фазовые кривые? Сколько фазовых кривых примыкают к данному нулю поля?

Пусть векторное поле v определено и гладко в области $V \subset \mathbb{R}^n$. По теореме Пикара-Линделефа через каждую точку $a \in V$ в момент времени 0 проходит единственная траектория поля $\varphi : (t_1, t_2) \to V$, $\varphi' = v(\varphi)$, $\varphi(0) = a$. Заметьте, что из нее можно сдвигом времени на произвольное $t_0 \in \mathbb{R}$ получать остальные проходящие через a траектории: $\psi(t) = \varphi(t + t_0)$, $\psi' = v(\psi)$, $\psi(t_0) = a$.

Определение. Векторные поля u в области $U \subset \mathbb{R}^n$ и v в области $V \subset \mathbb{R}^n$ называются *дифференцируемо эквивалентными*, если существует диффеоморфизм $f : U \to V$, переводящий u в v, то есть $f_* u = v$. Поля u и v называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $f : U \to V$, переводящий траектории u в траектории v: если $\varphi : \mathbb{R} \to U$ – траектория u, то $f \circ \varphi : \mathbb{R} \to V$ – траектория v, и любая траектория v получается таким образом.

Замечание. Так как диффеоморфизм сохраняет траектории поля, то дифференцируемая эквивалентность влечет топологическую, но не наоборот.

Пример. Поля (x, y) и $(x, 2y)$ эквивалентны топологически, но не дифференцируемо. Топологическая эквивалентность достигается гомеоморфизмом $f(x, y) = (x, y|y|)$ (**проверьте!**), но дифференциальная невозможна, так как у второго поля объединение некоторых фазовых кривых может дать пару гладких касающихся кривых, а у первого – нет.

Эквивалентность векторных полей сохраняет их качественные свойства (такие как наличие пары касающихся кривых, составленных из фазовых кривых). Поэтому важно уметь находить "простые" векторные поля, которые эквивалентны данному, и для которых исследование качественных свойств как можно проще. Простое (в описанном смысле) векторное поле, эквивалентное данному, называется его *нормальной формой* (например, линейная нормальная форма, полиномиаль-

ная нормальная форма, и т. д.) Оказывается, применительно к векторным полям, теорема Пикара-Линделефа и теорема о вариации приводят к следующим двум утверждениям о нормальных формах.

Теорема о выпрямлении. Пусть в окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$ определено гладкое векторное поле v, такое что $v(0) \neq 0$. Тогда в некоторой (возможно, меньшей) окрестности нуля это поле дифференцируемо эквивалентно постоянному полю.

Если $v(0) = 0$, то поле v не эквивалентно постоянному (**почему?**), но зачастую эквивалентно линейному:

Теорема Гробмана-Хартмана. Пусть в окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$ определено гладкое векторное поле $v(x) = A \cdot x + o(|x|)$, у которого вещественные части собственных чисел матрицы A ненулевые, тогда v топологически эквивалентно своей линейной части $\tilde{v}(x) = A \cdot x$ (а при $n = 2$ и дифференцируемо эквивалентно).

Пример. Если среди собственных чисел матрицы A есть чисто мнимые, то поле v обычно не эквивалентно своей линейной части. Рассмотрим, например, маятник с сопротивлением воздуха: $x' = v$, $v' = -\sin x - v^2$. Его колебания затухают, т. е. траектории стремятся к 0 (это очевидно из житейского опыта, а математическое доказательство будет позже, когда мы изучим необходимые для этого методы), в то время как у его линеаризации (математического маятника) колебания периодические. Проблема в мнимости собственных чисел линеаризации.

Пример. В то же время маятник с линейным трением $x' = v$, $v' = -\sin x - v$ удовлетворяет условию теоремы Гробмана-Хартмана (собственные числа линеаризации равны $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$), поэтому он эквивалентен своей линеаризации – математическому маятнику с линейным трением $x' = v$, $v' = -x - v$. Решая эту линейную систему, видим, что ее колебания затухают (траектории стремятся к 0), а значит, по эквивалентности, и колебания исходной системы затухают.

Замечание. Теорема Гробмана-Хартмана показывает, что траектории почти любого векторного поля не только количественно приближаются траекториями его линеаризации (как мы уже видели) но и имеют то же качественное поведение.

Для векторных полей, которые не удовлетворяют предположению теоремы Гробмана-Хартмана, существует множество других способов получения нормальных форм (полиномиальных). Эта наука была придумана Пуанкаре и до сих пор активно развивается, потому что помимо векторных полей в дифференциальной геометрии постоянно появляются другие схожие объекты, для которых тоже нужны нормальные формы.

В следующий раз мы докажем эти теоремы (теорему Гробмана-Хартмана – только в наиболее важном частном случае, когда вещественные части всех собственных чисел имеют один знак).

Конспект лекции 7

Доказательство теоремы о выпрямлении.

Выберем окрестность нуля $U \subset \mathbb{R}^n$ и число ε, такие что существует общее решение $x : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ системы $x' = v(x)$. Выберем линейную функцию $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такую что $L(v(0)) = 1$, обозначим через D пересечение $U \cap \ker L$, и обозначим через π проекцию $\mathbb{R}^n \to \ker L$, такую что $\pi(v(0)) = 0$.

Мы построим диффеоморфизм f окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$, оставляющий на месте все точки множества D и переводящий в поле v постоянное векторное поле $\tilde{v}(x) = v(0)$. Определим его формулой $f(a) = x(\pi(a), L(a))$ и заметим, что

1) f переводит траектории постоянного поля $\tilde{v}$ в траектории поля v. Действительно, траектории $\tilde{v}$ имеют вид $\varphi(t) = a + tv(0)$, поэтому $f(\varphi(t)) = x(\pi(a), t)$ – траектории v.

2) f – диффеоморфизм в малой окрестности нуля. Действительно, дифференциал $f_* : T_0\mathbb{R}^n \to T_0\mathbb{R}^n$ является тождественным отображением на $\ker L$ и на $v(0)$ (**почему?**), поэтому тождественен и на всем $T_0\mathbb{R}^n = (\mathbb{R} \cdot v(0)) + \ker L$, поэтому и для всех a, достаточно близких к 0, дифференциал $f_* : T_a\mathbb{R}^n \to T_a\mathbb{R}^n$ невырожден.

Диффеоморфизм, переводящий траектории поля $\tilde{v}$ в траектории v, переводит $\tilde{v}$ в v (**почему?**). $\square$

Замечание. Ясно, как можно догадаться до конструкции диффеоморфизма f: если мы хотим, чтобы он переводил $\tilde{v}$ в v, он должен переводить траектории в траектории. В частности, для каждого $a \in D$, траектория $a + tv(0)$, $t \in \mathbb{R}$, поля $\tilde{v}$ должна переходить в траекторию $x(a, t)$, $t \in \mathbb{R}$, поля v. Любая точка $b \in \mathbb{R}^n$ однозначно представима в виде $a + tv(0)$ – должно быть $a = \pi(b)$ и $t = L(b)$, поэтому она должна переходить в $x(a, t) = x(\pi(b), L(b))$.

Доказательство теоремы Гробмана-Хартмана и функция Ляпунова.

Теорему Гробмана-Хартмана мы докажем в предположении, что все собственные значения линеаризации имеют отрицательную вещественную часть. Мы разобьем доказательство на два этапа следующим определением.

Определение. *Функцией Ляпунова* нуля x_0 векторного поля v в окрестности $U \ni x_0$ называется выпуклая функция $\mathcal{L} : U \to \mathbb{R}$, такая что при $x \neq x_0$ всегда

1) $\mathcal{L}(x) > \mathcal{L}(x_0) = 0$,

2) $L_v\mathcal{L}(x) < 0$.

Замечание. Напомним, что $L_u f$ – производная вдоль вектора u в точке x – по определению равна производной $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x + tu)$ при $t = 0$. В частности, для любой траектории $\varphi \neq x_0$ векторного поля v в области U, по свойству (2) получаем $L_v\mathcal{L}(\varphi(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}(\varphi(t)) < 0$, то есть функция $\mathcal{L}(\varphi(t))$ убывает. Так иногда и формулируют свойство (2): *функция Ляпунова убывает вдоль траекторий поля.*

Замечание. Выпуклость не требуется в нижеследующей теореме 2 и обычно не включается в определение. Мы включили выпуклость в определение, так как она упрощает доказательства, а на практике функции Ляпунова обычно выпуклы.

Теорема 1. Пусть векторное поле v в окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$ имеет вид $v(x) = A \cdot x + o(|x|)$, и собственные числа линейной части A имеют отрицательную вещественную часть. Тогда у v в окрестности 0 есть функция Ляпунова.

Теорема 2. Если векторное поле в окрестности своего нуля имеет функцию Ляпунова, то оно топологически эквивалентно полю $v(x) = -x$.

Из этих двух фактов сразу следует теорема Гробмана-Хартмана для отрицательных вещественных частей собственных чисел: по теореме 1 поле $v(x) = A \cdot x + o(|x|)$ и его линейная часть $u(x) = A \cdot x$ имеют функцию Ляпунова, значит по теореме 2 оба эквивалентны полю $v(x) = -x$, а значит эквивалентны. Первый из них мы докажем на следующей лекции, предъявив явную формулу для функции Ляпунова, а второй – сейчас, с помощью следующего утверждения, которое очень важно само по себе.

Продолжение траекторий.

Теорема о продолжении. Любая траектория $\varphi : [0, m) \to U$ гладкого векторного поля φ в области $U \subset \mathbb{R}^n$ продолжается до времени M (то есть до траектории $\varphi : [0, M) \to U$), удовлетворяющего одному из следующих трех свойств:

1) Бесконечность является частичным пределом $|\varphi(t)|$ при $t \to M$,
2) Граничная точка U является частичным пределом $\varphi(t)$ при $t \to M$,
3) $M = +\infty$.

Замечание. Интуитивно утверждение очевидное: любая траектория либо уйдет на бесконечность, либо упрется в границу области определения векторного поля, либо сможет идти сколько угодно. Но доказательство нетривиально, оно будет дано на следующей лекции.

Доказательство теоремы 2.

Все это нужно нам для доказательства теоремы 2, и нас будет интересовать случай, когда U – множество меньших значений $\{\mathcal{L} < c\}$ функции Ляпунова $\mathcal{L}$ поля v. Напомним, что *множество меньших значений* $\{f < c\}$ функции f – это множество точек x, таких что $f(x) < c$. Заметим, что для траектории φ поля v, начавшейся в множестве $U = \{\mathcal{L} < c\}$ (т.е. такой что $\mathcal{L}(\varphi(0)) < c$) не могут выполняться альтернативы (1) и (2) теоремы о продолжении. Действительно, (1) не может иметь места, потому что множество меньших значений выпуклой неотрицательной функции с единственным нулем ограничено (**почему?**). Альтернатива (2) также не может иметь места, так как иначе $\varphi(M)$ принадлежало бы границе U, то есть множеству уровня $\{\mathcal{L} = c\}$, то есть

$$\mathcal{L}(\varphi(M)) = c \geqslant \mathcal{L}(\varphi(0)),$$

но этого быть не может вследствие убывания функции Ляпунова вдоль траекторий. Таким образом, для траектории φ поля v, начавшейся в множестве меньших значений функции Ляпунова $\{\mathcal{L} < c\}$, имеет места альтернатива (3): траектория неограниченно продолжается внутри $\{\mathcal{L} < c\}$. На языке общих решений:

Следствие. Если U – множество меньших значений функции Ляпунова векторного поля v, то уравнение $x' = v(x)$ имеет общее решение $x : \overline{U} \times [0, +\infty) \to \overline{U}$, то есть траектории неограниченно продолжаются внутри U.

Лемма. В обозначениях следствия $\lim_{t \to +\infty} x(a, t) = 0$ равномерно по $a \in \overline{U}$.

Доказательство. При фиксированном a функция $\mathcal{L}(x(a, t))$ убывает по t, но положительна, поэтому имеет горизонтальную асимптоту при $t \to +\infty$, поэтому ее

производная $\big(L_v\mathcal{L}\big)(x(a,t))$ имеет частичный предел 0 при $t \to +\infty$. Но $L_v\mathcal{L} < 0$ вне 0, поэтому $x(a,t)$ имеет частичный предел 0, поэтому $\mathcal{L}(x(a,t))$ имеет частичный предел 0. Но $\mathcal{L}(x(a,t))$ монотонна по t, поэтому $\lim_{t\to+\infty}\mathcal{L}(x(a,t)) = 0$ при каждом $a \in \overline{U}$ и, более того, сходимость равномерна по a по теореме Дини. Но $\mathcal{L} > 0$ вне 0, поэтому $\lim_{t\to+\infty} x(a,t) = 0$ равномерно по a. $\square$

Теперь докажем теорему 2: пусть U – множество меньших значений функции Ляпунова поля v, такого что $v(0) = 0$, построим гомеоморфизм $f : \overline{U} \to \overline{U}$, переводящий траектории поля $u(y) = -y$, то есть лучи $e^{-t}a$, $a \in \mathbb{R}^n$, в траектории поля v. Положим $f(a) = a$ при $a \in \partial U$ и при $a = 0$, а при $a \in U^* = U \setminus \{0\}$ определим $f(a)$ как в теореме о выпрямлении: определим отображение $\pi : U^* \to \partial U$ и функцию $l : U^* \to \mathbb{R}$ равенством $a = e^{-l(a)}\pi(a)$, так что $\pi(a)$ – проекция точки a на границу множества U из начала координат, а $l(a)$ – время, за которое траектория поля u приходит из этой проекции в a. Положим $f(a) = x(\pi(a), l(a))$ (x – общее решение системы $x' = v(x)$, оно существует согласно предыдущему следствию). Получившееся отображение непрерывно на U^* по непрерывности функций x, π и l, и непрерывно в 0 по предыдущей лемме. Непрерывное инъективное отображение топологического шара $\overline{U}$ в себя, сохраняющее границу, является гомеоморфизмом по теореме Брауэра. $\square$

Конспект лекции 8

Докажем использованные в прошлый раз факты.

Существование функции Ляпунова.

Сначала построим функцию Ляпунова для линейного поля $u(x) = A \cdot x$. Оказывается, можно найти такую положительно определенную квадратичную форму $\mathcal{L}(x) = x^T Q x > 0$, что $L_u \mathcal{L}(x) = -x^T x = -|x|^2 < 0$ при любом $x \neq 0$. Действительно, пусть $\varphi(t) = e^{tA} a$ – любая траектория поля u, тогда из равенства $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}(\varphi(t)) = L_u \mathcal{L}(x) = -\varphi(t)^T \varphi(t)$ следует, что $\mathcal{L}(\varphi(t)) = -\int \varphi(t)^T \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Подставляя в это равенство $\mathcal{L}(x) = x^T Q x$ и $\varphi(t) = e^{tA} a$, получаем $a^T e^{tA^T} Q e^{tA} a = -a^T \left(\int e^{tA^T} e^{tA}\,\mathrm{d}t\right) a$ для любого вектора $a \in \mathbb{R}^n$, то есть $e^{tA^T} Q e^{tA} = -\int e^{tA^T} e^{tA}\,\mathrm{d}t$. Заметим, что для матрицы A с отрицательными вещественными частями собственных чисел $e^{tA} \to 0$ при $t \to +\infty$ (**почему?**), поэтому можем перейти от неопределенного интеграла к определенному так: $e^{tA^T} Q e^{tA} = \int_t^{+\infty} e^{tA^T} e^{tA}\,\mathrm{d}t$. При $t = 0$ получаем явную формулу:

$$Q = \int_0^{+\infty} e^{tA^T} e^{tA}\,\mathrm{d}t.$$

Эта матрица по определению симметрична и положительно определена: $x^T Q x = \int_0^{+\infty} x^T e^{tA^T} e^{tA} x\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} |e^{tA} x|^2\,\mathrm{d}t > 0$. Значит $\mathcal{L}(x) = x^T Q x$ – функция Ляпунова для поля $u(x) = Ax$. Она же будет функцией Ляпунова и для $v(x) = Ax + o(|x|)$:

$$L_v \mathcal{L} = v \cdot \mathrm{d}\mathcal{L} = u \cdot \mathrm{d}\mathcal{L} + o(|x|) \cdot \mathrm{d}\mathcal{L} = L_u \mathcal{L} + o(|x|) \cdot (2Qx) = -|x|^2 + o(|x|^2) < 0.$$

Замечание. Из соображений порядка малости можно доказать еще много полезных фактов. Например, если два линейных поля u и v диффернцируемо эквивалентны (т. е. переводятся друг в друга диффеоморфизмом f), то они линейно эквивалентны (т. е. переводятся друг в друга линейным отображением, то есть их матрицы сопряжены). Действительно, пусть F – линейная часть f (т. е. $f(x) = F(x) + o(|x|)$), тогда $v(F(x)) = v(f(x)) + o(|x|) = f_*(u)(x) + o(|x|) = F_*(u)(x) + o(|x|) + o(|x|)$, то есть линейные функции $v(F(x))$ и $F_*(u)(x)$ отличаются на $o(|x|)$, а значит равны.

Замечание. С топологической эквивалентностью ситуация другая, например, линейно неэквивалентные поля $x\partial/\partial x + y\partial/\partial y$ и $x\partial/\partial x + 2y\partial/\partial y$ топологически эквивалентны, так как их траектории переводятся друг в друга гомеоморфизмом плоскости $f(x, y) = (x,\, y|y|)$ (**проверьте это и ответьте, какое из них в какое переходит под действием f!**).

Доказательство теоремы о продолжении.

Теорема о продолжении. Любая траектория $\varphi : [0, m) \to U$ гладкого векторного поля φ в области $U \subset \mathbb{R}^n$ продолжается до времени M (то есть до $\varphi : [0, M) \to U$), удовлетворяющего одному из следующих трех свойств:

1) Бесконечность является частичным пределом $|\varphi(t)|$ при $t \to M$,
2) Граничная точка U является частичным пределом $\varphi(t)$ при $t \to M$,
3) $M = +\infty$.

Доказательство. Пусть M – максимальный момент времени, до которого продолжается φ (**почему максимум существует?**). Предположив, что M не

удовлетворяет ни одному из трех свойств, придем к противоречию. Действительно, отрицание (1) означает, что у φ существует частичный предел a при $t \to M$, отрицание (2) означает, что этот частичный предел содержится в U. Значит по теореме Пикара-Линделефа для поля v существуют окрестность $V \ni a$ и положительное время ε, такие что из каждой точки $x \in V$ выходит траектория $\varphi_x : [0, \varepsilon) \to U$ поля: $\varphi_x(0) = x$. Так как a – частичный предел φ при $t \to M$, есть время $s > M - \varepsilon/2$, при котором $\varphi(s) \in V$. Обозначим эту точку через x и склеим из траекторий $\varphi : [0, s) \to U$ и $\varphi_x : [0, \varepsilon) \to U$ траекторию

$$\psi : [0, s + \varepsilon) \to U, \quad \psi(t) = \begin{cases} \varphi(t) \mid t < s \\ \varphi_x(t - s) \mid t > s \end{cases}$$

Эта траектория является продолжением φ до времени $s+\varepsilon > M$, что противоречит максимальности M. $\square$

Следствие: теорема о продолжении на компакте. Если векторное поле является гладким в окрестности компакта $K \subset \mathbb{R}^n$, то из каждой внутренней точки $a \in K$ выходит траектория $\varphi : [0, t_0] \to K$, $\varphi(0) = a$, такая что либо $\varphi(t_0)$ содержится в границе K, либо полная траектория $\varphi : [0, +\infty) \to K$, $\varphi(0) = a$.

Доказательство. Пусть $U \supset K$ – открытая область, на которой поле гладко. Применим к траектории, проходящей через a, теорему о продолжении в области U. Получим траекторию $\varphi : [0, M) \to U$. Если $M = \infty$ и $\varphi(0, +\infty) \subset K$, то утверждение доказано. Если же $\varphi(0, +\infty) \not\subset K$, или частичный предел $\varphi(t)$ при $t \to M$ лежит на границе U или на бесконечности, то найдется t', близкое к M, при котором $\varphi(t')$ не содержится в K. Тогда, пользуясь компактностью K, выберем минимальное $t_0 < t'$, такое что $\varphi(t_0)$ содержится в границе K. $\square$

Обсудим теперь некоторые следствия и уточнения доказанных теорем о выпрямлении.

Устойчивость.

Определение. Ноль x_0 поля v *асимптотически устойчив*, если
1 (устойчивость по Ляпунову) для любой окрестности $U \ni x_0$ существует окрестность $V \ni x_0$, такая, что для любой траектории φ, начавшейся в V (т. е. такой что $\varphi(0) \in V$), следует $\varphi\big([0, +\infty)\big) \subset U$.
2 (сходимость) существует окрестность $V \ni x$, такая, что для любой траектории φ, начавшейся в V, следует $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = x_0$.

Следствие. Если линеаризация векторного поля в данном нуле имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями, то этот векторное поле асимптотически устойчиво в этом нуле. Более общим образом, если поле имеет в данном нуле функцию Ляпунова, то этот ноль асимптотически устойчив.

Доказательство. По теореме 2 такие поля эквивалентны полю $u(x) = -x$, а оно асимптотически устойчиво.

Пример. Как показывает асимптотически устойчивый физический маятник с трением $x' = v$, $v' = -\sin x - v^2$, иногда асимптотическая устойчивость имеет место, но не может быть установлена с помощью этого следствия. Может захотеться ослабить это утверждение: если линеаризация имеет собственные числа с неотрицательными вещественными частями, то поле устойчиво по Ляпунову. Для

линейных полей это верно, но для произвольных – нет. Пример – “физический маятник с трением в обратной съемке”: $x' = -v$, $v' = \sin x + v^2$.

Пример. Кстати, теперь мы одной фразой можем доказать, что физический маятник с трением асимптотически устойчив: функция $x^2 + v^2$ является его функцией Ляпунова (хотя не является таковой для его линейной части!).

Линеаризация в двумерном случае

Теорема. Пусть в окрестности $0 \in \mathbb{R}^2$ определено гладкое векторное поле $v(x) = A \cdot x + o(|x|)$, у которого вещественные части собственных чисел матрицы A ненулевые, тогда v дифференцируемо эквивалентно своей линейной части $\tilde{v}(x) = A \cdot x$, причем диффеоморфизм, переводящий v в u можно выбрать таким, что его дифференциал в нуле тождественен.

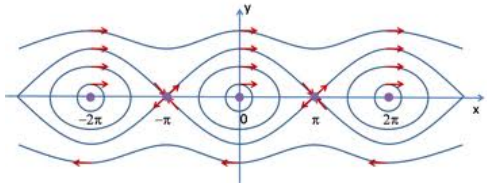
Довесок относительно тождественности важен, например, для следующих приложений.

Пример. Рассмотрим маятник вверх ногами, в неустойчивом равновесии: $x' = v$, $v' = \sin x$. Его линеаризация $x' = v$, $v' = x$ – это седло. Оно имеет две прямые траектории, стремящиеся к 0 при $t \to +\infty$: маятник толкнули в одном из двух направлений так, чтобы он дошел ровно до неустойчивого равновесия (за бесконечно долгое время). Так как физический маятник эквивалентен математическому, он также имеет две траектории, стремящиеся к неустойчивому равновесию. Эти траектории уже не прямые, и нас интересует направление их касательных в нуле. Эти касательные как раз и будут прямыми траекториями математического маятника, потому что диффеоморфизм, переводящий физический маятник в математический, сохраняет касательные направления в начале координат.

Фазовые портреты на плоскости

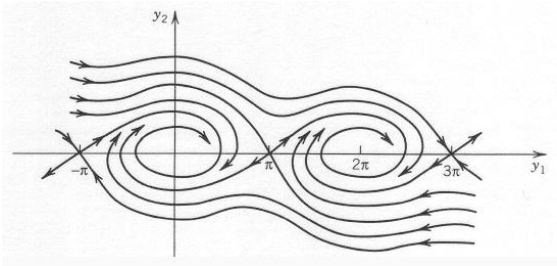
Попробуем применить наши знания к построению фазовых портретов дифференциальных уравнений, которые мы не можем явно решить. До сих пор мы осилили только портрет системы Лотка-Вольтерра, у которой была только одно положение равновесия, и портрет на всей плоскости мало отличался от портрета в окрестности равновесия.

С физическим маятником $x' = v$, $v' = -\sin x$ дело обстоит сложнее: каждая точка вида $(k\pi, 0)$ является его положением равновесия: при четных k (маятник в нижней точке) положения устойчивы по Ляпунову, а при нечетном (маятник в верхней точке) – неустойчивы. Из закона сохранения энергии (первый интеграл $v^2 + \sin^2 x$) мы знаем, что траектории вокруг устойчивых равновесий замкнуты. Из теоремы о линеаризации знаем, что в окрестности каждого неустойчивого равновесия портрет похож на линейное седло. Интерполируя эти картинки, получаем следующую:



Замечание. На этой картинке хорошо видны два качественно разных типа траекторий: “солнышко” при достаточно большой энергии и обычное раскачивание при меньшей. Фазовые кривые, разделяющие области качественно разных типов поведения, называются *сепаратрисами*. Этот пример демонстрирует общее правило: сепаратрисами бывают фазовые кривые, примыкающие к положениям равновесия, к которым примыкает конечное число фазовых кривых.

Если учитывать сопротивление воздуха ($x' = v$, $v' = -\sin x - v^2$), то устойчивые равновесия становятся асимптотически устойчивыми (напомним, что для равновесия $(0,0)$ энергия $x^2+\sin^2 v$ окажется функцией Ляпунова, так как убывает вдоль траекторий из-за трения), а качественное различие в поведении траекторий пропадает (солнышко со временем замедляется до обычного раскачивания). Интерполируя локальные картины устойчивых и неустойчивых равновесий, получим в этом случае:

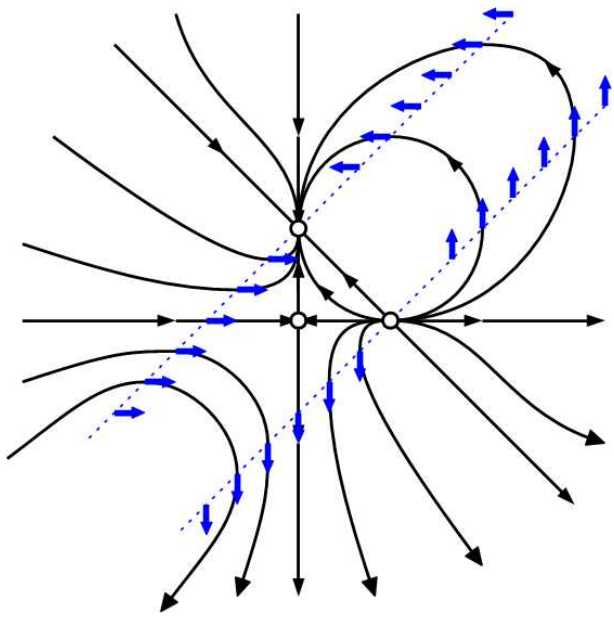


Конспект лекции 9

Сегодня мы будем учиться рисовать глобальные фазовые портреты на примере поля $(x-y)(x\partial/\partial x+y\partial/\partial y)-x\partial/\partial x+y\partial/\partial y$. У него три равновесия $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,1)$ – седловое, антиустойчивое и устойчивое соответственно. Также, приравнивая к нулю компоненты этого поля $x^2-xy-x=x(x-y-1)$ и $xy-y^2+y=y(x-y+1)$, получим, что поле горизонтально во всех точках прямых $y=0$ и $y=x+1$ и вертикально во всех точках прямых $x=0$ и $y=x-1$.

Замечание. Множество точек, в которых векторы поля имеют данный угол наклона, называется *изоклиной*. Для изучения фазового портрета полезно знать его изоклины. В данном случае, например, мы нашли изоклины наклонов 0° и 90°, в других случаях может быть удобнее изучить другие углы наклона.

Нарисуем кусочки фазовых кривых вблизи точек равновесия (там они должны напоминать фазовые портреты линеаризаций) и вблизи изоклин (там они имеют известное направление). Интерполируя эти кусочки "на глазок", получим картинку:



В этой картинке заложена масса "угаданных на глазок" качественных утверждений о фазовом портрете. Но такие утверждения тоже требуют доказательства.

Пример. Докажем, что из точки $(1,0)$ в точку $(0,1)$ идет бесконечно много фазовых кривых. Пусть K – треугольник с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,1)$. Применяя к траектории, выпущенной из любой его внутренней точки $a\in K$ при $t\to+\infty$, теорему о продолжении на компакте, получим, что эта траектория либо продолжается до полной $\varphi:(0,+\infty)\to K$, либо до $\varphi:(0,t_0]\to K$, такой что $\varphi(t_0)$ принадлежит границе K. Заметим, что второй из этих случаев невозможен: так как векторное поле касается границы K, то граница состоит из фазовых кривых, и отличная от них траектория φ не может иметь с ними общих точек по теореме единственности решения. Таким образом, траектория продолжается до полной $\varphi:(0,+\infty)\to K$. Так как внутри K абсцисса векторного поля отрицательна, а ордината положительна, то абсцисса $\varphi(t)$ убывает, а ордината $\varphi(t)$ возрастает,

поэтому существует конечный предел $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)\in K$, значит этот предел является положением равновесия. Так как к антиустойчивому узлу $(1,0)$ траектории не стремятся, а к седлу $(0,0)$ стремится только траектория, лежащая на оси абсцисс, то пределом φ может быть только устойчивый узел $(1,0)$. Изучая аналогичным образом продолжение этой траектории из a при $t\to-\infty$, мы получим, что через любую внутреннюю точку $a\in K$ проходит траектория $\varphi:\mathbb{R}\to K$, стремящаяся к $(1,0)$ и $(0,1)$, когда t стремится к $-\infty$ и $+\infty$ соответственно.

Замечание. Защищая нарисованный Вами фазовый портрет на коллоквиуме, Вы должны быть готовы по просьбе экзаменатора строго доказывать подобные свойства нарисованной Вами картинки с помощью изученных нами теорем. В идеале (который, однако, не обязательно достигать для оценки 10) свойства Вашей картинки, которые Вы будете в состоянии строго доказать, должны описывать эту картинку однозначно с точностью до орбитальной эквивалентности.

Фазовые портреты на бесконечности

На вышеприведенной картинке пока совершенно неясно, есть ли в положительном квадранте неограниченные траектории, и если есть, то как они ведут себя на бесконечности – есть ли у них (наклонные) асимптоты и т.д. Чтобы ответить на этот вопрос, перейдем из координат (x,y) плоскости $\mathbb{R}^2$, рассматриваемой как аффинная карта проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$, в координаты (u,v) одной из двух других стандартных аффинных карт. Напомним, что такой переход осуществляется проецированием одной из координатных плоскостей в $\mathbb{R}^3$ на другую из точки $(1,1,1)$, то есть записывается в координатах как $u=1/y$, $v=x/y$ или $u=1/x$, $v=y/x$, в зависимости от того, какую из двух карт выберем. Выберем, например, первую – в ней наше поле запишется как $(u+v-1)\partial/\partial u+v\partial/\partial v$ (**проверьте!**).

Замечание. Для вычисления полезно заметить, что *логарифмические* векторные поля $x\partial/\partial x$ и $y\partial/\partial y$ преобразуются намного проще базисных $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$:

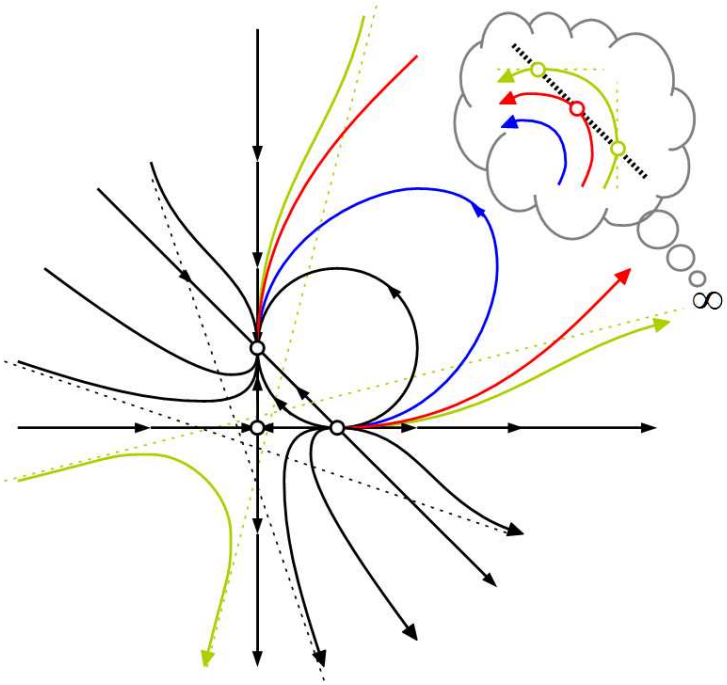
$$x\partial/\partial x=v\partial/\partial v,\quad y\partial/\partial y=-u\partial/\partial u-v\partial/\partial v.$$

Поле $(u+v-1)\partial/\partial u+v\partial/\partial v$ не обращается в ноль в точках бесконечно удаленной прямой $u=0$, и касается ее только в точке $(u,v)=(0,1)$. Это значит, что через любую другую точку бесконечно удаленной прямой проходит фазовая кривая C, имеющая касательную прямую L, отличную от $u=0$. Эта прямая L (вернее, ее пересечение с аффинной картой (x,y)) является асимптотой фазовой кривой C:

Утверждение (или определение асимптоты) из курса анализа-1. Если кривая $C\subset\mathbb{RP}^2$ является гладкой в точке пересечения с бесконечно удаленной прямой, и ее касательная прямая L не совпадает с бесконечно удаленной, то аффинная прямая $L\cap\mathbb{R}^2$ является асимптотой кривой $C\cap\mathbb{R}^2$. В любом другом случае $C\cap\mathbb{R}^2$ не имеет асимптоты.

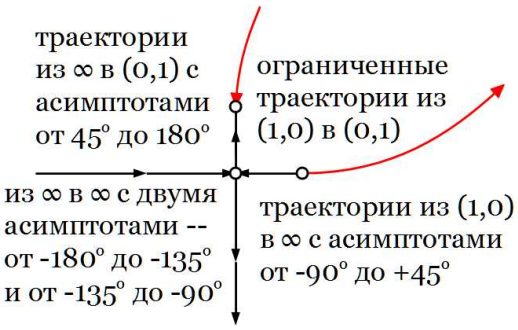
Таким образом, на фазовом портрете в аффинной карте (x,y) фазовые кривые уходят на бесконечность во всех возможных направлениях, кроме $v=\frac{y}{x}=1$, и все имеют асимптоты. Фазовая кривая, касающаяся бесконечно удаленной прямой в точке $(u,v)=(1,0)$, разбивается этой точкой на две фазовые кривые в $\mathbb{R}^2$ – они не имеют асимптот и примыкают к равновесиям $(1,0)$ и $(0,1)$ соответственно (**докажите!**). Эти две фазовые кривые ограничивают область, заполненную ограни-

ченными фазовыми кривыми (**докажите!**). В третьем квадранте все траектории стремятся к бесконечности при $t \to \pm\infty$, а в четных квадрантах все траектории одним концом примыкают к равновесиям $(1,0)$ и $(0,1)$ соответственно, а другим – к бесконечности (**докажите!**). На самом деле вся перечисленная нами информация об этом фазовом портрете уже однозначно определяет его топологический тип (но доказывать это не нужно). С учетом полученных сведений о поведении на бесконечности фазовый портрет можно изобразить существенно точнее:

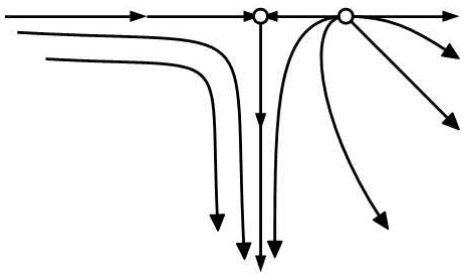


Здесь также показана в другой карте окрестность точки, в которой поле касается бесконечно удаленной прямой. Нарисованные там фазовые кривые и касательные – продолжения фазовых кривых и асимптот тех же цветов из основной картинки.

Замечание. Как и на любом разумном фазовом портрете, плоскость распадается на области, в каждой из которых все фазовые кривые имеют одинаковое качественное поведение – в данном случае стремятся к одному и тому же равновесию (или к бесконечности) при $t \to +\infty$, и к одному и тому же при $t \to -\infty$. Эти области изображены ниже и разделяются фазовыми кривыми, которые, напомним, называются *сепаратрисами*. В данном случае сепаратрисы – это четыре фазовые кривые, примыкающие к седлу $(0,0)$, и две фазовые кривые, примыкающие к точке касания векторного поля с бесконечно удаленной прямой:



Замечание. Пренебрежение к рисованию изоклин или анализу поведения на бесконечности привело бы скорее всего к абсолютно неверному изображению нижней половины портрета – проще всего нарисовать картинку, на которой бесконечно много уходящих вниз траекторий имеют вертикальную асимптоту:



Замечание. Все сказанное о поведении нашего поля на бесконечности было строго обосновано только для тех точек бесконечно удаленной прямой, которые попали в изучавшуюся нами карту с координатами $u = 1/y$, $v = x/y$. Но в нее не попала точка $(x, y) = (\infty, 0)$, которая является началом координат в карте с координатами $\tilde{u} = 1/x$, $\tilde{v} = y/x$. Пересчитывая наше поле в координатах $(\tilde{u}, \tilde{v})$, получим $(1 - \tilde{u} - \tilde{v})\partial/\partial\tilde{u} - \tilde{v}\partial/\partial\tilde{v}$ и увидим, что в оставшейся неисследованной точке $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (0, 0)$ это поле также не касается бесконечно удаленной прямой $\tilde{u} = 0$.

Замечание. Наш эскиз фазового портрета все равно пока далек от совершенства: например, на самом деле фазовые кривые не имеют точек перегиба. Но это уже вопрос геометрии, а не топологии, и в него мы не углубляемся.

Замкнутые траектории

Мы научились строить фазовые портреты векторных полей, интерполируя фазовые портреты их линеаризаций вблизи точек равновесия. Нужно, однако, заметить, что знание топологии фазового портрета вблизи каждой точки само по себе не позволяет восстановить топологию фазового портрета на всей плоскости.

Пример. Рассмотрим поле $x' = v + (x^2 + y^2 - 1)x$, $v' = -x + (x^2 + y^2 - 1)v$ и математический маятник с трением $\tilde{x}' = \tilde{v}$, $\tilde{v}' = -\tilde{x} - \tilde{v}$. В окрестности нуля они топологически эквивалентны, так как оба эквивалентны своим линеаризациям – устойчивым фокусам. В окрестности любой другой точки они эквивалентны, так как выпрямляются. Однако глобально они не эквивалентны, так как у первого есть замкнутая фазовая кривая – окружность $x^2 + v^2 = 1$, а у второго нет. **После этого примера в последней задаче листка 3 требуется привести пример поля без замкнутых траекторий!**

Существование замкнутых фазовых кривых – чрезвычайно сложный вопрос. Например, до сих пор неизвестно, существует ли квадратичное векторное поле на плоскости с пятью замкнутыми траекториями. Круг вопросов такого рода известен как *инфинитезимальная 16я проблема Гильберта*. Даже интуитивно очевидные утверждения о замкнутых фазовых кривых доказываются сложно.

Пример. Теорема Пуанкаре-Бендиксона: если траектория гладкого поля v неограниченно продолжается в компакте K, не содержащем точек равновесия, то она стремится к замкнутой фазовой кривой (в частности, в K в этом случае существует замкнутая фазовая кривая).

Задание. Найдите в файле `коллоквиум.pdf` свое векторное поле и нарисуйте его фазовый портрет с такой степенью подробности, как описано в конспекте лекции 9. Построение векторного поля в окрестностях равновесий и изоклин с последующей интерполяцией "на глазок" будет оцениваться в **4 балла**, классификация качественного поведения фазовых кривых – в **3 балла**, анализ асимптотик фазовых кривых – в **3 балла**. К первым двум этапам Вы можете приступать сразу, они уже разбирались. К третьему этапу лучше приступать после лекции 9 – на ней будут подробно разобраны примеры построения подобных фазовых портретов. При построении можно без доказательства пользоваться отсутствием у предложенных полей замкнутых фазовых кривых (хотя изредка они встречаются и у квадратичных полей – постройте, например, $(5x^2+20y)\partial/\partial x+(30x^2-30+9y)\partial/\partial y)$, а также отсутствием кривых, соединяющих два неустойчивых равновесия (у поля, взятого "наугад", такого не бывает – подумайте, почему).

Подготовка. Все вычисления, которые Вам встретятся (решение уравнений, поиск собственных чисел и т. д.) можно при желании делать с помощью CAS – даже с помощью WolframAlpha, если ничем более эффективным Вы пока не владеете. Но это ни к чему, так как, при правильном подходе к задаче, вычислений встретится мало (например, для поиска всех точек равновесия потребуется решить одно линейное уравнение с одной неизвестной, точные значения собственных чисел линеаризаций для построения фазового портрета в большинстве случаев не нужны, и т. д.).

Все утверждения о качественном поведении траекторий, заложенные в получившемся у Вас фазовом портрете, требуют обоснования. По возможности заранее продумайте, как вывести эти утверждения из изученных нами фактов – *теорем о выпрямлении, линеаризации, продолжении* и т. д. На коллоквиуме экзаменатор обязательно будет задавать вопросы о том, как обосновать те или иные качественные свойства предъявленного Вами фазового портрета, а также проверит, насколько Вы понимаете теоремы, использованные для обоснования. Поэтому еще раз продумайте формулировки основных теорем (знание доказательств проверяться не будет) и вспомните примеры, демонстрирующие необходимость всех предположений в этих формулировках.

Не секрет, что правильную картинку можно получить (или проверить) онлайн – например, по адресу `http://math.rice.edu/~dfield/dfpp.html`. Поэтому правильно срисованный с экрана фазовый портрет с численными данными его равновесий, но без навыков его обоснования и без знания необходимых для этого понятий и фактов дает **0 баллов**.

Коллоквиум состоится **в пятницу 29 ноября на 2, 3 и 5 парах**: вторая пара для групп B и C, третья – для групп A и D, пятая – для досдачи того, что Вы не успели. Так как вопросы розданы заранее, времени на подготовку не дается. Беседа по каждому из трех этапов построения портрета занимает не более 10 минут, по истечении которых экзаменатор ставит оценку. На 2 или 3 паре Вы должны сдать два из трех этапов построения портрета: на 5 паре у Вас будет возможность сдать только один из оставшихся несданными этапов. По окончании **сдайте** экзаменатору свой рисунок (написав на нем свое имя и векторное поле).

Конспект лекции 10

Начиная с этого момента, все функции и векторные поля предполагаются бесконечно дифференцируемыми, и это свойство называется гладкостью.

Векторные поля на многообразиях и их продолжение

При разборе прошлого примера мы рассмотрели в трех аффинных картах $\mathbb{RP}^2$ три векторных поля, переходящие друг в друга при отображениях склейки этих карт. Такой набор совместимых векторных полей на картах удобно понимать как векторное поле на всей проективной плоскости. Более общим образом, рассмотрим любое гладкое многообразие M с атласом $g_\alpha : U_\alpha \to M$, где U_α – область в $\mathbb{R}^n$.

Определение. *Векторным полем* на многообразии M называется набор векторных полей v_α на областях U_α, таких что $(g_\beta^{-1} \circ g_\alpha)_* v_\alpha = v_\beta$. Его *траекторией* называется отображение $C : (a, b) \to M$, такое что $g_\alpha^{-1} \circ C$ является траекторией поля v_α. Векторное поле называется *полным*, если любая его траектория неограниченно продолжается.

Более подробно, склеивая касательные пространства карт TU_α с помощью дифференциалов $(g_\beta^{-1} \circ g_\alpha)_* : TU_\alpha \to TU_\beta$, получим многообразие, называемое касательным пространством к M и обозначаемое TM. Тогда векторным полем на M называется сечение $v : M \to TM$ расслоения $TM \to M$, и оно однозначно определяется своими ограничениями на карты $v_\alpha : U_\alpha \to TU_\alpha$.

Пример. Изучавшееся нами квадратичное поле на плоскости не является полным, так как его траектории за конечное время уходят на бесконечность.

Теорема. Любое гладкое поле на компактном многообразии является полным.

Пример. Продолжение изученного нами поля на проективную плоскость полно (**вспомните, почему проективная плоскость компактна!**). У этого и прошлого примера есть и одномерный аналог: квадратичное векторное поле на прямой не полно, однако его продолжение на проективную прямую (т. е. окружность) полно – этот пример решает одну из задач листка 3.

Неформальное доказательство теоремы: так как у компактного многообразия "нет границы", в формулировке теоремы о продолжении для поля на компакт может иметь место только второй вариант. Проблема в том, что мы доказывали эту теорему только для векторных полей в $\mathbb{R}^n$. Повторить доказательство теоремы о продолжении для случая произвольного многообразия – простое и полезное упражнение, но мы дадим другое доказательство, намного более содержательное.

Определение. Пусть поле v на многообразии V таково, что из каждой точки a области U выходит единственная траектория $\varphi : [0, M] \to V$, $\varphi(0) = a$. Обозначим точку $\varphi(t)$ через $K_t(a)$. Таким образом при $t \leqslant M$ мы определили *отображение фазового потока* $K_t : U \to V$, "сдвигающее каждую точку вдоль проходящей через нее траектории на время t". В контексте дифферениальных уравнений это отображение также называется *оператором Коши*.

Пример. Для линейного поля $v(x) = Ax$ отображение K_t определено на всем $\mathbb{R}^n$, само линейно и равно $K_t(a) = e^{tA}a$. Для квадратичного поля $v(x) = -x^2\partial/\partial x$ на прямой $K_1(a) = a/(1 + a)$ (**проверьте!**), но определено K_1 только на луче

$(-1, +\infty)$, поскольку траектория φ с начальным условием вне этого луча $\varphi(0) = a < -1$ задается формулой $\varphi(t) = a/(1+ta)$ и определена только при $t < -1/a < 1$.

В дальнейшем мы везде предполагаем поле v гладким.

Замечание. Раньше мы обозначали $K_t(a)$ через $x(a,t)$, где $x : U \times [0, M] \to V$ – общее решение системы дифференциальных уравнений, заданных полем v, так что новое определение – просто смена обозначений.

Переформулируем в новых обозначениях теорему Пикара-Линделефа:

Лемма. У любой точки $a \in V$ есть окрестность $U \ni a$ и $t > 0$, такие что K_t корректно определено и дифференцируемо на U.

Доказательство. Точка a содержится в одной из карт $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, на которой траектории поля являются решениями системы дифференциальных уравнений $x' = v(x)$. Применив к этой системе теорему существования общего решения и его дифференируемости, получим окрестность $U \ni a$ и $t > 0$, такие что общее решение системы $x : U \times [0, t] \to U_\alpha$ определено и дифференцируемо. Таким образом $K_t(a) = x(a,t)$ определено и дифференцируемо на U. $\square$

Лемма. Отображение K_t инъективно, и обратное к нему равно K_{-t}.

Доказательство. Инъективность следует из единственности решений: равенство $K_t(a) = K_t(b)$ означает по определению, что $\varphi(t) = \psi(t)$ для двух траекторий φ и ψ, таких что $\varphi(0) = a$ и $\psi(0) = b$, значит, эти траектории совпадают, и в том числе $a = \varphi(0) = \psi(0) = b$. Требуемое равенство $K_t(a) = (K_{-t_0})^{-1}(a)$ означает, что для траектории φ, такой что $\varphi(0) = a$ и $\varphi(t_0) = b$, и траектории ψ, такой что $\psi(0) = b$, будет выполнено $\psi(-t_0) = a$. Это верно, так как $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t + t_0)$ также является траекторией поля v, и по единственности решения равенство $\tilde{\varphi}(0) = \varphi(t_0) = \psi(0)$ влечет совпадение $\tilde{\varphi}$ и ψ, в частности $\psi(-t_0) = \tilde{\varphi}(-t_0) = \varphi(0) = a$. $\square$

Следствие. Отображение K_t является диффеоморфизмом.

Лемма. Если отображение K_t определено на множествах U и V, то оно определено и на множестве $U \cup V$. Если отображение K_t определено на множестве U, а K_s – на множестве $K_t(U)$, то композиция $K_s \circ K_t$ равна K_{s+t}.

Доказательство очевидно следует из единственности решений, как и выше.

Доказательство теоремы о продолжении на компактном многообразии. У каждой точки a компактного многообразия V по первой лемме есть окрестность U_a и число $t_a > 0$, такие что K_{t_a} определено на U_a. Выбрав из покрытия многообразия V окрестностями U_a конечное подпокрытие $U_{a_1}, \ldots, U_{a_N}$, положим $t_0 = \min(t_{a_1}, \ldots, t_{a_N})$. Так как отображение K_{t_0} определено на каждом из множеств покрытия U_{a_i}, то по предыдущей лемме оно определено и на их объединении, то есть на всем многообразии V. Теперь для любого момента t можно найти целое M, для которого $t/M = t' \leqslant t_0$, и по предыдущей лемме корректно определенная композиция $\underbrace{K_{t'} \circ \ldots \circ K_{t'}}_{M}$ равна $K_{Mt'} = K_t$. Таким образом отображение потока $K_t(a)$ определен при любых $t \in \mathbb{R}$ и $a \in V$. Это нам и нужно, так как $\varphi(t) = K_a(t)$ – траектория поля с началом в a. $\square$

Мотивированные этим доказательством, начнем изучать отображения потока.

Отображения потока

Подытожим, что мы знаем о диффеоморфизмах потока векторного поля v (или операторах Коши системы уравнений $x' = v(x)$). Мы знаем, что это семейство диффеоморфизмов K_t, $t \in \mathbb{R}$, которые определенны, вообще говоря, не на всей области определения поля v, но везде, где определены, удовлетворяют свойствам

$$K_0 = \mathrm{Id},\ K_{-t} = (K_t)^{-1},\ K_s \circ K_t = K_{s+t}. \qquad (*)$$

Так как $K_t(a) = x(a,t)$, где x – общее решение системы $x' = v(x)$, то поиск его дифференциала $(K_t)_*$ – частный случай дифференцирования общего решения по начальному параметру.

Пример. Для поля $v(x) = \sin x\ \partial/\partial x$ все отображение K_1 найти сложно, но производная $K_1'(0)$ равна производной общего решения $x(a,t)$ по a при $a = 0$ и $t = 1$. Перейдя к линеаризации $y' = y$, $y(0) = 1$, в точке равновесия $a = 0$, получим из теоремы о дифференцировании по начальному параметру, что $\frac{\partial}{\partial a}x(0,t) = y(t) = e^t$, то есть $K_1'(0) = e$.

В частности, если векторное поле v полно на многообразии V, то автоморфизм $K_t : V \to V$ определен при каждом $t \in \mathbb{R}$, и свойства $(*)$ означают, что сопоставление $t \rightsquigarrow K_t$ является гладким гомеоморфизмом $\mathbb{R} \to D_V =$ (группа дифференцируемых автоморфизмов многообразия V).

Определение. Гладкий гомеоморфизм $\mathbb{R} \to D_V =$ (группа дифференцируемых автоморфизмов многообразия V), то есть гладкое отображение $x : V \times \mathbb{R} \to V$, для которого отображения $K_t(a) = x(a,t)$ удволетворяют свойствам $K_0 = \mathrm{Id}$, $K_t \circ K_s = K_{t+s}$, называется *однопараметрическим семейством диффеоморфизмов*.

Заметим, что для любого такого семейства $x : V \times \mathbb{R} \to V$, отображения $K_t : V \to V$ действительно являются диффеоморфизмами, поскольку K_t и K_{-t} по определению являются взаимно обратными гладкими отображениями. Как мы уже видели, любое полное векторное поле порождает однопараметрическое семейство диффеоморфизмов.

Утверждение. Обратно, любое такое семейство порождается некоторым векторным полем.

Доказательство. Проверим, что для любого $a \in V$ кривая $\varphi(t) = K_t(a)$ является траекторией векторного поля $v(a) = \frac{\partial x}{\partial a}(a,0)$. Действительно, для любого t обозначим $\varphi(t) = x(a,t)$ через b и получим $\varphi(t+s) - \varphi(t) = x(a,t+s) - x(a,t) = x(x(a,t),s) - x(a,t) = x(b,s) - x(b,0) = s \cdot v(b) + o(s)$. Поделив обечасти на s и устремляя его к 0, получим $\varphi'(t) = v(b) = v(\varphi(t))$. $\square$

Получается, что полные векторные поля и однопараметрические семейства диффеоморфизмов находятся во взаимно однозначном соответствии. Оказывается, что алгебраические свойства однопараметрических подгрупп группы автоморфизмов многообразия тесно связаны с геометрическими свойствами соответствующих векторных полей. Мы, в первую очередь, остановимся на свойстве коммутирования.

Коммутирование векторных полей

Определение. Векторные поля с диффеоморфизмами потока K_t и L_t называются коммутирующими в области U, если коммутируют их потоки: $K_s \circ L_t = L_t \circ K_s$ при любых s и t, таких что обе части равенства определены на U.

Пример. Поля $x\partial/\partial x + y\partial/\partial y$ и $y\partial/\partial x - x\partial/\partial y$ коммутируют.

Утверждение. Линейно независимые векторные поля $v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}$ коммутируют в области $U \subset \mathbb{R}^n$ если и только если в окрестности каждой точки $x \in U$ есть система координат $(y_1, \ldots, y_n)$, в которой эти поля – координатные: $v^{(i)} = \partial/\partial y_i$.

Пример. Поля из прошлого примера являются координатными в полярной системе координат $x = e^r \cos\alpha, y = e^r \sin\alpha$.

Доказательство. Очевидно, координатные поля коммутируют. Обратно, определим отображение F из окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$ в окрестность точки a так: $F(x_1, \ldots, x_n) = K^{(1)}_{x_1} \circ \ldots \circ K^{(n)}_{x_n}(a)$. Тогда, дифференцируя это равенство по x_1, получим $F_*(x_1, \ldots, x_n)\big(\partial/\partial x_1\big) = v^{(1)}(F(x_1, \ldots, x_n))$. Аналогично, переписывая за счет коммутирования $F(x_1, \ldots, x_n) = K^{(i)}_{x_i} \circ \ldots (a)$ и дифференцируя по x_i, получим $F_*(x_1, \ldots, x_n)\big(\partial/\partial x_i\big) = v^{(i)}(F(x_1, \ldots, x_n))$. По линейной независимости полей $v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}$ получаем, что F – диффеоморфизм, поэтому он индуцирует в окрестности точки a систему координат $y_1, \ldots, y_n$, в которой он записывается как $y_1(x) = x_1, \ldots, y_n(x) = x_n$. Векторы $F_*(x_1, \ldots, x_n)\big(\partial/\partial x_i\big)$ являются в ней координатными векторами $\partial/\partial y_i$. $\square$

Оказывается, чтобы проверять, коммутируют ли поля, не обязательно их интегрировать (т. е. вычислять их диффеоморфизмы сдвигов).

Определение. Коммутатором векторных полей $u = \sum_i u_i \partial/\partial x_i$ и $v = \sum_i v_i \partial/\partial x_i$ называется векторное поле

$$[u, v] = \sum_{i,j} \left(u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \partial/\partial x_i.$$

Пример. Если $u(x) = Ax$ и $v(x) = Bx$ линейны, то $[u, v](x) = (AB - BA)x$.

Утверждение. Это определение не зависит от выбора системы координат.

Утверждение. u и v коммутируют если и только если $[u, v] = 0$.

На следующей лекции мы увидим, что оба этих утверждения легко следуют из другого, инвариантного определения коммутатора (некоторым оно знакомо по курсу анализа).

Конспект лекции 11

Сегодня нам удобно ограничиться функциями и векторными полями, которые являются *аналитическими*, то есть представимыми в виде абсолютно сходящихся степенных рядов.

Коммутатор векторных полей

Для области $U \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\mathcal{O}_U$ кольцо всех аналитических функций на U. Каждое векторное поле v на U определяет оператор $L_v : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$, переводящий функцию f в ее производную Ли $L_v f$. Это *дифференциальный оператор*.

Определение. Отображение $D : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$ называется *дифференциальным оператором*, если удовлетворяет следующим свойствам производной:
$D(\mathrm{const}) = 0$,
$D(f+g) = D(f) + D(g)$,
$D(fg) = D(f)g + fD(g)$.

Утверждение. Каждый дифференциальный оператор D является производной Ли векторного поля $v = \sum_i D(x_i)\partial/\partial x_i$.

Доказательство. Нам нужно доказать, что для каждой функции $f \in \mathcal{O}_U$ и каждой точки a будет $D\big(f\big)(a) = \big(L_v f\big)(a)$. Разложив функцию f в степенной ряд в точке a, получим $f(x) = f(a) + \sum_i (x_i - a_i)\big(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + g_i(x)\big)$, где g_i – аналитические функции на U, обращающиеся в ноль в a. Применив к этой сумме операторы D и L_v, получим $\sum_i D(x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_i D(x_i)g_i(x) + \sum_{i,j}(x_i - a_i)(x_j - a_j)D\big(g_{i,j}\big)(x)$ и $\sum_i L_v(x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_i L_v(x_i)g_{i,j}(x) + \sum_i (x_i - a_i)L_v\big(g_{i,j}\big)(x)$. При $x = a$ выражения упростятся до $\sum_i D(x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ и $\sum_i L_v(x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, которые равны, так как $L_v(x_i) = D(x_i)$ по определению поля v. $\square$

Оказывается, векторные поля и дифференциальные операторы – одно и то же. Поэтому мы будем обозначать производную Ли так же, как и само поле: $L_v f = v\,f = v(f)$.

Утверждение. Если u и v – дифференциальные операторы, то оператор $uv - vu$ (то есть оператор, значение которого на каждой функции f определяется как $u(v(f)) - v(u(f))$, также является дифференциальным.

Доказательство. Первые два свойства очевидны, докажем третье:

$$u(v(fg)) - v(u(fg)) = u(v(f)g + fv(g)) - v(u(f)g + fu(g)) =$$

$$= u(v(f))g + v(f)u(g) + u(f)v(g) + fu(v(g)) - v(u(f))g - u(f)v(g) - v(f)u(g) - fv(u(g)) =$$
$$= [u(v(f)) - v(u(f))]g + f[u(v(g)) - v(u(g))].$$

Определение. Векторное поле $uv - vu$ называется *коммутатором* полей u и v и обозначается $[u, v]$.

Пример. Пусть $u = \sum_i u_i\partial/\partial x_i$ и $v = \sum_i v_i\partial/\partial x_i$, посчитаем $[u, v]$ в координатах. По первому утверждению, его i-я компонента равна

$$[u, v](x_i) = u(v(x_i)) - v(u(x_i)) = u(v_i) - v(u_i) = \sum_j \left(u_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - v_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right).$$

Коммутатор и коммутирование

Проделанный выше фокус – один из важнейших приемов в современной геометрии: от изучения геометрических объектов на множестве U мы переходим к изучению алгебраических объектов на кольце функций на U. Проделаем то же самое с диффеоморфизмами. Сопоставим отображению $F : U \to V$ гомоморфизм колец $H : \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_U$, сопоставляющий функции f на V функцию $f \circ F$ на U.

Замечание. Отображение F однозначно определяется гомоморфизмом H: пусть $(x_1, \dots, x_n)$ – система координат в W, тогда F должно переводить каждую точку $a \in U$ в точку с координатами $H\big(x_1\big)(a), \dots, H\big(x_n\big)(a)$ в W. Поэтому будем обозначать гомоморфизм $\mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_U$ той же буквой F.

Теорема. Если $K_t : U \to V \subset W$ – диффеоморфизм потока поля v на области W, то $K_t = \exp(tv) = \sum_k \frac{t^k}{k!} v^k$ (как гомоморфизмы $\mathcal{O}_W \to \mathcal{O}_U$).

Доказательство. Докажем для любой функции $f \in \mathcal{O}_W$ и любой точки $a \in U$ равенство $K_t\big(f\big)(a) = \sum_k \frac{t^k}{k!}\big(v^k f\big)(a)$.
Случай 1: если a – точка равновесия поля v, то $v(a) = 0$, $K_t(a) = a$, и обе части искомого равенства, очевидно, равны $f(a)$.
Случай 2: если v – координатное поле $\partial/\partial x_1$, то $K_t(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n)$ – семейство сдвигов, и требуемое равенство имеет вид $f(a_1 + t, a_2 \dots, a_n) = \sum \frac{t^k}{k!} \frac{\partial^k f}{(\partial x_1)^k}(a_1, \dots, a_n)$, то есть является просто разложением аналитической функции f в ряд Тейлора по первой координате.
Этими двумя случаями все и исчерпывается, поскольку в окрестности любой точки, отличной от равновесия, векторное поле по теореме о выпрямлении является координатным в подходящей локальной системе координат. $\square$

Следствие. Если $[u, v] = 0$, то диффеоморфизмы потоков u и v коммутируют.

Доказательство. По предыдущей теореме, нам нужно доказать, что $(\sum_k \frac{s^k}{k!} u^k)(\sum_m \frac{t^m}{k!} v^m) = (\sum_m \frac{t^m}{k!} v^m)(\sum_k \frac{s^k}{k!} u^k)$. Раскрытие скобок в обеих частях сводит это равенство к равенству $uv = vu$, которое нам дано. $\square$

Вообще, имеет место следующая геометрическая интерпретация коммутатора: если идти вдоль поля u в течение времени s, потом вдоль v в течение t, потом против u в течение s, а потом против v в течение t, то придем не в исходную точку, а сместимся от нее на вектор, в первом приближении равный $st[u, v]$. Более аккуратно, коммутатор векторных полей u и v с диффеоморфизмами потока K_s и L_t в точке a равен значению производной $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} K_{-s} \circ L_{-t} \circ K_s \circ L_t(a)$ при $s = t = 0$. Действительно: $\exp(-su)\exp(-tv)\exp(su)\exp(tv) = 1 + st(uv - vu) +$ (старшие члены по s и t).

Пример. Коммутатор полей $\partial/\partial y$ и $y\partial/\partial x$ равен $\partial/\partial x$ – из геометрической интерпретации это получить легче, чем прямым вычислением.

Неавтономные линейные дифференциальные уравнения

Для дальнейшего нам нужно сделать отступление, которое относится к тематике первого модуля, но немного там не уместилось – обсудить неавтономные системы линейных дифференциальных уравнений вида $x' = A(t) \cdot x$, где $A : \mathbb{R} \to \mathfrak{Gl}_n$ – матрица, зависящая от времени.

Пример. Маятник, который со временем легчает: $x' = v$, $v' = -e^{-t}x$.

Теорема. Если функция $A : \mathbb{R} \to \mathfrak{Gl}_n$ непрерывна, то уравнение $x' = A(t) \cdot x$ имеет общее решение $x : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, определенное при всех начальных условиях во все моменты времени.

Это тоже теорема о продолжении – решения линейных систем продолжаются на всю временную ось. Чтобы это доказывать, как мы знаем, удобно сменить обозначения – перейти от общих решений к операторам Коши.

Определение. *Оператор Коши* $K_{p,q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ для дифференциального уравнения $x' = f(x)$ – это отображение, которое ставит в соответствие значению $x(p)$ каждого решения $x = x(t)$ уравнения $x' = f(x)$ значение $x(q)$ этого же решения. Иными словами, если $x = x(a,t)$ – общее решение задачи Коши $x' = f(x)$, $x(a,p) = a$, то $K_{p,q}(a) = x(a,q)$.

В этих обозначениях теорему можно переформулировать так: для любых r и s оператор Коши $K_{r,s}$ системы $x' = A(t) \cdot x$ с непрерывной правой частью корректно определен.

Доказательство. Так как правая часть системы $A(t) \cdot x$ линейна по x, она при $t \in [0,r]$ автоматически является L-Липшицевой, где $L = \max_{t \in [0,r],\, |x| \leqslant 1} |A(t) \cdot x|$. Поэтому по теореме Пикара-Линделефа, примененной на шаре B_R радиуса R с центром в $0 \in \mathbb{R}^n$, у нашего уравнения существует общее решение $x : B_R \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ при $\varepsilon \leqslant \min(r, \delta/M, 1/L)$, где $M = \max_{t \in [0,r],\, |x| \leqslant R+\delta} |A(t) \cdot x|$. Заметим однако, что при достаточно больших δ число δ/M стремится к $1/L$, то есть превосходит, например, $1/2L$, то есть при любом R существует общее решение $x : B_R \times [-1/2L, 1/2L] \to \mathbb{R}^n$. Таким образом, общее решение x определено на семействе множеств, исчерпывающих $\mathbb{R}^n \times [-1/2l, 1/2L]$, а значит определено $x : \mathbb{R}^n \times [-1/2L, 1/2L] \to \mathbb{R}^n$.

Аналогичный результат верен в любой точке временной оси: любое t_0 содержится в интервале I_{t_0}, таком что определено общее решение $x : \mathbb{R}^n \times I_{t_0} \to \mathbb{R}^n$ задачи Коши $x'(a,t) = A(t) \cdot x(a,t)$, $x(a,t_0) = a$. Поэтому сколь угодно большой отрезок $[r,s]$ можно покрыть конечным числом таких интервалов $I_{t_1}, \ldots, I_{t_N}$. Выберем в пересечении I_{t_i} и $I_{t_{i+1}}$ точку p_i, тогда $(p_{i-1}, p_i) \subset I_{t_i}$, поэтому определен оператор Коши K_{p_{i-1},p_i}, поэтому определена их композиция $K_{r,s} = K_{p_{N-1},s} \circ K_{p_{N-2},p_{N-1}} \circ \ldots \circ K_{r,p_1}$. $\square$

Таким образом, каждое решение системы $x' = A(t)x$ определено на всей временной оси, и для любого момента времени t_0 сопоставление решению $x = x(t)$ его значения $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ задает изоморфизм векторных пространств $\mathbb{R}^n \simeq \{$решения системы $x' = A(t)x\}$. В частности, пространство решений n-мерно, и все решения являются линейными комбинациями n решений $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$, образующих базис. Такой базис называется *фундаментальной системой решений*.

ФСР неавтономной линейной системы вычислить символьно, вообще говоря, невозможно. Но ее определитель $w = \det(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)})$ – можно с помощью следующего важного факта.

Теорема. Функция w удовлетворяет дифференциальному уравнению $w' = \big(\operatorname{tr} A(t)\big)w$.

Замечание. Получившееся уравнение на w решается: $w(t) = w(0)e^{\int_0^t \operatorname{tr} A(s)\,\mathrm{d}s}$. Это называется *формулой Лиувилля*.

Доказательство. Обозначим через $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ столбцы транспонированной матрицы $X = (x_{(1)}, \ldots, x_{(n)})$ и заметим, что $\det\big((x^{(1)})', x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\big) = \det\big(\big(\sum_i a_{1,i}x^{(i)}\big), x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\big) = \det\big((a_{1,1}x^{(1)}), x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\big) = a_{1,1}w$. Поэтому $w' = \det(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})' = \det\big((x^{(1)})', x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\big) + \ldots + \det\big(x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)}, x^{(n)}\big) = a_{1,1}w + \ldots + a_{n,n}w = (\operatorname{tr} A)w$. $\square$

Пример. Если $A(t) = A$ постоянная, то система $x' = Ax$ имеет ФСР $X(t) = e^{tA}$, а ее определитель w удовлетворяет уравнению $w' = (\operatorname{tr} A)w$, то есть $\det e^A = \det X(1) = w(1) = e^{\operatorname{tr} A}$.

Пример. От линейного неавтономного уравнения высшего порядка

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = 0 \qquad (*)$$

можно перейти к соответствующей системе уравнений первого порядка. Применив к этой системе вышеизложенное, получим следующее. Все решения уравнения $(*)$ продолжаются на всю числовую ось и образуют n-мерное векторное пространство. Если $x_1, \ldots, x_n$ – его базис, то *определитель Вронского* $w = \det(x_i^{(j)})$, где $i = 1, \ldots, n$ и $j = 0, \ldots, n-1$, удовлетворяет линейному уравнению $w' = -a_1(t) \cdot w$.

Конспект лекции 12

Напомним алгебраическую интерпретацию диффеоморфизмов потока:

Теорема. Если $K_t : U \to V \subset W$ – диффеоморфизм потока поля v на области W, то $K_t = \exp(tv) = \sum_k$ (как гомоморфизмы $\mathcal{O}_W \to \mathcal{O}_U$).

Аналогично интерпретируется на алгебраическом языке образ векторного поля при диффеоморфизме (**проверьте, что это тавтология!**):

Лемма. Пусть v – образ поля u при диффеоморфизме $F : U \to V$, то есть $v(F(a)) = F_* u(a)$ для любого $a \in U$. Тогда, переходя к операторам $u : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$, $v : \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_V$ и $F : \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_U$, получим равенство $uF = Fv$.

Алгебра Ли векторных полей

Определение. Пусть u_t – образ векторного поля u при диффеоморфизме потока K_t поля v, то есть $u_t(a) = (K_t)_* v\big(K_{-t}(a)\big)$. *Производной Ли векторного поля* u вдоль векторного поля v называется поле w, определенное равенством $w(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_t(a)$ в каждой точке u. Это поле w обозначается через $L_v u$.

Оказывается, это понятие связано с коммутатором векторных полей двумя разными способами: во-первых, оно удовлетворяет правилу Лейбница относительно коммутатора, то есть $L_w[u, v] = [L_w u, v] + [u, L_w v]$, а во-вторых оно просто совпадает с коммутатором: $L_v u = [u, v]$. Первый из этих фактов аналогичен правилу Лейбница для дифференцирования функций; докажем второй, переведя его на алгебраический язык: диффеоморфизм потока v равен $\exp tv$ по предыдущей теореме, поле u_t равно $(\exp tv)u(\exp -tv)$ по предыдущей лемме, поэтому требуемое равенство превращается в очевидное $(\exp tv)u(\exp -tv) = t(vu - uv) + \ldots$.

Теперь первое равенство можно переписать как $[[u, v], w] = [[u, w], v] + [u, [v, w]]$ или, используя антисимметричность $[u, v] = -[v, u]$, в более симметричном виде:

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0. \qquad (*)$$

Другой способ доказать это равенство – заменить каждый коммутатор $[u, v]$ в левой части на $uv - vu$, раскрыть скобки и убедиться, что всё сокращается.

Определение. Равенство $(*)$ называется *тождеством Якоби*. Векторное пространство L с антисимметричной билмнейной операцией $[\cdot, \cdot] : L \times L \to L$, удовлетворяющей тождеству Якоби, называется *алгеброй Ли*.

Пример. Гладкие векторные поля на многообразии образует алгебру Ли.

Пример. Самый известный пример алгебры Ли – это алгебра $\mathfrak{Gl}_n$, пространство вещественных матриц размера $n \times n$ с операцией $[A, B] = AB - BA$. Продемонстрируем, что его можно рассматривать как частный случай алгебры Ли векторных полей, а экспоненту матриц – как частный случай экспоненты векторных полей. Для этого отождествим $\mathfrak{Gl}_n$ с касательным пространством $T_E GL_n$, где GL_n – группа (по умножению) всех невырожденных матриц размера $n \times n$, а E – ее нейтральный элемент. А именно, отождествим матрицу $P \in \mathfrak{Gl}_n$ с вектором скорости кривой $E + tP$ при $t = 0$. Тогда каждый касательный вектор $P \in \mathfrak{Gl}_n$ дает начало *левоинвариантному векторному полю* v_P, такому что $v_P(A) = AP$ в любой точке $A \in GL_n$. При этом $[v_P, v_Q] = v_{[P,Q]}$, то есть построенное нами соответствие $P \rightsquigarrow v_P$ дает вложение алгебры Ли $\mathfrak{Gl}_n$ в алгебру Ли векторных полей

на GL_n. Точно так же, для каждого элемента $A \in GL_n$ определим *диффеоморфизм сдвига* $S_A : GL_n \to GL_n$, переводящий $B \in GL_n$ в $S_A(B) = BA$. При этом $\exp(v_P) = S_{\exp(P)}$, то есть сопоставление $A \rightsquigarrow S_A$ дает вложение группы GL_n в группу диффеоморфизмов $GL_n \to GL_n$, переводящее экспоненту $\exp : \mathfrak{Gl}_n \to GL_n$ в экспоненту $\exp :$ (алгебра векторных полей) $\to$ (группа диффеоморфизмов).

Матричные группы

Утверждение. Если $G \subset GL_n$ – подгруппа Ли (то есть подмножество, замкнутое по умножению матриц), то ее касательное пространство $T_E G \subset \mathfrak{Gl}_n$ – подалгебра Ли (то есть замкнуто относительно взятия коммутатора).

Замечание. Напомним, что *касательным пространством*, или *касательным конусом*, к подмножеству G векторного пространства V в точке $a \in G$ называется множество $T_a G \subset T_a V$, состоящее из векторов скорости в точке a всех гладких кривых вида $\varphi : [0, \varepsilon) \to G$, таких что $\varphi(0) = a$.

Доказательство. Пусть A и B содержатся в $T_E G$. Докажем, что $\alpha A + \beta B \in T_0 G$ и $[A, B] \in T_E G$. Тот факт, что A и B содержатся в $T_E G$, означает, что существуют кривые $\varphi : \mathbb{R} \to G$ и $\psi : \mathbb{R} \to G$ с векторами скорости A и B в E, то есть $\varphi(t) = E + tA + o(t)$ и $\psi(t) = E + tB + o(t)$. Так как при этом кривая $\varphi(\alpha t)\psi(\beta t) = E + t(\alpha A + \beta B) + o(t)$ также содержится в G, то и ее вектор скорости $\alpha A + \beta B \in T_0 G$. Так как кривая $\varphi(\sqrt{t})\psi(\sqrt{t})\big(\varphi(\sqrt{t})\big)^{-1}\big(\psi(\sqrt{t})\big)^{-1} = E + t[A, B] + o(t)$ также содержится в G, то и ее вектор скорости $[A, B] \in T_E G$. $\square$

Следствие. В каждой точке $A \subset G$ касательное пространство $T_A G$ является векторным подпространством в $T_A GL_n$ и состоит из всех матриц вида XA, $X \in T_E G$.

Доказательство. Линейный диффеоморфизм сдвига $S_A : GL_n \to GL_n$, переводящий $B \in GL_n$ в $S_A(B) = BA$, переводит G в G и A в A, поэтому $T_A G = (S_A)_*\big(T_E G\big)$. $\square$

Замечание. Все касательные конусы $T_E G$ оказались векторными подпространствами потому, что любая подгруппа $G \subset GL_n$ на самом деле – гладкое подмногообразие (мы этого доказывать не будем).

Напоминание. Подмножество G векторного пространства V называется k-мерным *гладким подмногообразием*, если в любой точке $a \in G$ существует *выпрямляющий диффеоморфизм* $F :$ (окрестность a) $\to$ (окрестность 0), такой что в окрестности нуля образ $F(G)$ является k-мерным векторным подпространством. **Продумайте, почему это эквивалентно определению из курса анализа.** В частности, касательные конусы подмногообразия являются векторными подпространствами. Тем не менее, множество, все касательные конусы которого являются векторными подпространствами, не обязательно окажется подмногообразием: например, $x^2 = y^4$.

Напомним некоторые известные подгруппы GL_n и найдем их алгебры Ли.

Пример. Подгруппа всех матриц с определителем 1 обозначается $SL_n \subset Gl_n$, а ее алгебра Ли – $\mathfrak{Sl}_n \subset \mathfrak{Gl}_n$ – является гиперплоскостью. Докажем, что она состоит из всех матриц $B \subset \mathfrak{Gl}_n$, таких что $\operatorname{tr} B = 0$. Действительно, для любой такой B

кривая $\exp tB$ содержится в SL_n, потому что по формуле Лиувилля $\det \exp tB = \exp \operatorname{tr} tB = \exp 0 = 1$. Поэтому вектор скорости этой кривой $B = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp tB|_{t=0}$ содержится в касательном пространстве $\mathfrak{Gl}_n$. Получается, что гиперплоскость $\mathfrak{Gl}_n$ содержит гиперплоскость $\operatorname{tr} = 0$, поэтому они совпадают.

Пример. Подгруппа всех ортогональных матриц обозначается $O_n \subset G_n$, а ее алгебра Ли – $\mathfrak{O}_n \subset \mathfrak{Gl}_n$ – является $n(n-1)/2$-мерной плоскостью. Докажем, что она состоит из всех кососимметрических матриц. Действительно, для любая кососимметрическая B коммутирует с B^T, поэтому $(\exp tB)(\exp tB)^T = \exp t(B + B^T) = \exp 0 = E$, поэтому кривая $\exp tB$ содержится в O_n, поэтому ее касательный вектор $B = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp tB|_{t=0}$ содержится в касательном пространстве $\mathfrak{O}_n$. Получается, что $n(n-1)/2$-мерная плоскость $\{B \mid B + B^T = 0\}$ содержится в плоскости $\mathfrak{O}_n$ той же размерности, поэтому они совпадают.

Замечание. Это позволяет описать касательные пространства к SL_n и O_n в любой точке A: они состоят из всех матриц вида XA, где X имеет нулевой след или кососимметрична, соответственно.

Замечание. Мы заметили, что касательное пространство к любой матричной группе в единице является алгеброй Ли (**проверьте это на двух приведенных примерах!**). Обратно, оказывается, что для любой алгебры Ли $L \subset \mathfrak{Gl}_n$ экспонента $\exp L$ замкнута относительно операции произведения матриц в окрестности единицы. Это следует из формулы Беккера-Кэмпбелла-Хаусдорфа, выражающей произведение двух матриц в виде (сложного) ряда от многократных коммутаторов этих матриц.

Репер Френе

Эта классическая геометрическая конструкция – наглядный пример нашего вычисления алгебры Ли $\mathfrak{O}_n$.

Определение. Кривая $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ называется *натурально параметризованной*, если она пробегается с единичной скоростью, то есть $|\varphi'(t)| = 1$ для всех t. Любую гладкую кривую можно пройти с единичной скоростью:

Лемма. Для любой гладкой кривой $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (то есть такой, что $\psi' \neq 0$) существует замена параметра $t = t(s)$, такая что кривая $\psi(t(s))$ является натурально параметризованной. Параметр s называется *натуральным*.

Доказательство. Взяв в требуемом равенстве $|\psi(t(s))'| = 1$ производную по частям, получим $t'(s) = 1/\left|(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}(t(s))\right|$. Это дифференциальное уравнение на искомую функцию $t(s)$, его решение существует и единственно. $\square$

Определение. *Репером Френе* натурально параметризованной кривой $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ называется ортонормальный положительно ориентированный репер (v, n, b) в трехмерном пространстве $T_{\varphi(t)}\mathbb{R}^3$, такой что $v(t) = \varphi'(t)$ и $n(t) = \varphi''(t)/|\varphi''(t)|$. Множитель $k(t) = |\varphi''(t)|$ называется *кривизной* кривой φ.

В этом определении использована ортогональность $\varphi'(t)$ и $\varphi''(t)$ для натурально параметризованной кривой: действительно, дифференцируя $\varphi'(t) \cdot \varphi'(t) = 1$, получаем $2\varphi'(t) \cdot \varphi''(t) = 0$. Поэтому репер Френе корректно определен во всех точках кривой, где φ'' не равен нулю.

В более геометрических терминах, матрица $\Phi(t) = (v(t), n(t), b(t))$ задает отображение $\Phi : \mathbb{R} \to O_n$, поэтому $\Phi'(t) \in T_{\Phi(t)}O_n$, то есть $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, где A – кососимметрическая матрица. Более того, равенство $v'(t) = \varphi''(t) = k(t) \cdot n(t)$ означает, что первая строка матрицы A имеет вид $(0, k(t), 0)$. Поэтому сама матрица имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}$, где число $\tau(t)$ называется *кручением* и описывает мгновенную угловую скорость, с которой поворачивается репер Френе вокруг направления $v(t)$ в момент t.

Знание кривизны и кручения кривой (то есть матрицы A) однозначно задает кривую с точностью до движения пространства, поскольку задача Коши $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, $\Phi(0) = E$, имеет единственное решение.

Пример. Кроме винтовых линий, не существует кривой, которую можно было бы совместить с собой движением объемлющего пространства, совмещая при этом любые две заданные точки на ней. Действительно, если такая кривая есть, то для нее кривизна и кручение во всех точках одинаковы, то есть матрица $A(t) = A$ постоянна. Поэтому $\Phi(t) = (v(t), n(t), b(t)) = \exp tA$, и $\varphi(t) = \int_0^t v(t)\mathrm{d}t$ – винтовая линия.

Кривизна и огибающие

Для простоты продолжим эту историю, ограничившись кривыми на плоскости. Дадим в этом случае три определения *центра кривизны* гладкой кривой $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ в точке $\varphi(0) = a$.

Определение. Предположим без ограничения общности, что кривая φ натурально параметризована, тогда ее кривизну k в точке a определим как $|\varphi''(0)|$, репер Френе – как $v = \varphi'(0)$ и $n = \varphi''(0)/k$, а *центр кривизны* – как точку $a + n/k \in \mathbb{R}^2$ (мы отступили в направлении, перпендикулярном кривой, на расстояние $1/k$, называемое *радусом кривизны*).

Это определение может показаться искусственным, но его важность в том, что оно эквивалентно двум следующим, намного более естественным.

Определение. Проведем перпендикуляр через каждую точку кривой φ, и обозначим через C кривую, касающуюся всех этих перпендикуляров – *эволюту* кривой φ. *Центром кривизны* φ в точке $\varphi(0) = a$ назовем точку касания эволюты C с перпендикуляром к φ в точке a.

Определение. Назовем *прилегающей окружностью* к натурально параметризованной кривой φ в точке $\varphi(0) = a$ такую натурально параметризованную окружность $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, что $\varphi(t) - \psi(t) = o(t^2)$. (Такая окружность единственна – для окружностей с другими радиусами, касающихся φ в точке a разность будет иметь порядок малости $o(t)$). Назовем центр и радиус этой окружности *центром и радиусом кривизны*.

Теорема. Эти три определения центра и радиуса кривизны согласованы.

Совпадение определений 2 и 3 очевидно из физических соображений: будем наматывать на кривую C нитку с концом a. Тогда, с одной стороны, ясно, что конец

нитки заметет кривую φ, а с другой стороны – что конец нитки, наматываемой на кривую C и в момент $t = 0$ касающейся ее в точке c, на $o(t^2)$ отличается от конца нитки той же длины, вращающейся вокруг точки c.

Для совпадения Определений 1 и 2 научимся искать огибающие:

Утверждение. Пусть для каждого $C \in \mathbb{R}$ на плоскости задана гладкая кривая $\{(x, y) \mid f(x, y, C) = 0\}$. Тогда кривая, касающаяся всех этих кривых (то есть их *огибающая*) получается исключением переменной C из системы уравнений $f(x, y, C) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial C}(x, y, C) = 0$.

Пример. Семейство парабол, задаваемое уравнениями $y - (x - C)^2 = 0$, имеет огибающую $y - (x - C)^2 = 2(x - C) = 0$, то есть $y = 0$.

Доказательство. Уравнение $f(x, y, C) = 0$ задает поверхность U в пространстве с координатами (x, y, C), рассмотрим ее проекцию $\pi : U \to \mathbb{R}^2$ на координатную плоскость (x, y). Если гладкая кривая $S \subset U$ такова, что для любой точки $(x_0, y_0, C_0) \in S$ проекция $\pi(S)$ касается кривой $f(x, y, C_0) = 0$ в точке (x_0, y_0), то касательная плоскость $T_{(x_0,y_0,C_0)}U$ содержит вертикальную прямую (параллельную координатной оси C), то есть $\frac{\partial f}{\partial C}(x_0, y_0, C_0) = 0$. $\square$

Применив это к семейству перпендикуляров $\{z \mid (z - \varphi(C)) \cdot \varphi'(C) = 0\}$ кривой $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, получим, что ее эволюта задается уравнениями $(z - \varphi(C)) \cdot \varphi'(C) = 0$ и $-\varphi'(C) \cdot \varphi'(C) + (z - \varphi(C)) \cdot \varphi''(C) = 0$. Переписывая их в терминах ортонормального репера Френе $v = \varphi'(C), n = \varphi''(C)/k$, получим $(z - \varphi(C)) \cdot v = 0$, $(z - \varphi(C)) \cdot n = 1/k$. Это значит, что в координатах репера Френе точка касания перпендикуляра к φ и ее эволюты имеет координаты $(0, 1/k)$, то есть находится на перпендикуляре на расстоянии $1/k$ от кривой. Это и означает эквивалентность определений 1 и 2.