Анзац Бете в квантовых интегрируемых системах

Содержание

Вводные замечания

История квантовых интегрируемых систем началась в 1931 году, когда Г.Бете удалось построить точные собственные функции гамильтониана спиновой цепочки Гейзенберга с помощью специальной подстановки, с тех пор ставшей знаменитой и носящей теперь его имя (анзац Бете). В том или ином виде этот метод оказался применим ко множеству других интегрируемых моделей – как спиновых, так и теоретико-полевых. С математической точки зрения метод Бете связан с теорией представлений квантовых алгебр (q-деформаций универсальных обертывающих алгебр Ли и янгианов).

Хотя за прошедшие годы была предложена масса различных обобщений и вариантов метода Бете, секрет его удивительной эффективности и универсальности до конца не раскрыт до сих пор.

Предлагаемые лекции содержат изложение следующих вопросов.

- Координатный анзац Бете на примере модели Гейзенберга и модели одномерного бозе-газа с парным точечным взаимодействием между частицами;

- Анзац Бете в точно решаемых моделях статистической механики на решетке на примере 6-вершинной модели;
- Уравнения Бете и функция Янга-Янга, вычисление нормы бетевских векторов;
- Квантовый метод обратной задачи и алгебраический анзац Бете, квантовые R-матрицы, уравнение Янга-Бакстера;
- Функциональный анзац Бете и метод Q-операторов Бакстера, функциональные соотношения для трансфер-матриц, трансфер-матрицы как тау-функции.

Знание основ квантовой механики и статистической физики для их понимания весьма желательно, но не категорически необходимо. Вне физического контекста анзац Бете в своем конечномерном варианте – это просто метод диагонализации больших матриц специального вида, и в этом смысле не требует никаких предварительных знаний кроме основ линейной алгебры.

1 Координатный анзац Бете

1.1 Анзац Бете в модели Гейзенберга

1.1.1 Обозначения и терминология

Матрицы Паули. Матрицы Паули – это 2×2 матрицы следующего вида:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Они образуют удобный базис в пространстве эрмитовых 2×2 матриц с нулевым следом. Для них используются также обозначения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а единичная матрица иногда обозначается как σ_0. Для краткости мы иногда будем писать просто 1 вместо единичной матрицы. Основные свойства матриц Паули таковы:

1) $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$,

2) $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z,\;\; \sigma_y\sigma_z = i\sigma_x,\;\; \sigma_z\sigma_x = i\sigma_y$,

3) $\sigma_j\sigma_k = -\sigma_k\sigma_j$ при $j \neq k$.

Матрицы Паули удобно объединить в 3-вектор с матричными компонентами: $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. Ниже под $\vec{\sigma}$ будем иметь в виду совокупность всех трех матриц Паули. Часто используются также матрицы

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что $\sigma_+^2 = \sigma_-^2 = 0$, $[\sigma_z, \sigma_\pm] = \pm 2\sigma_\pm$ и $[\sigma_+,\, \sigma_-] = \sigma_z$.

В $\mathrm{End}\,(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ справедливо равенство

$$\sigma_0 \otimes \sigma_0 + \sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z = 2P_{12} \tag{1.1}$$

где P_{12} – оператор перестановки тензорных сомножителей. На векторы он действует так: если u, v – любые два вектора из $\mathbb{C}^2$, то $P_{12}\,(u \otimes v) = v \otimes u$. Эквивалентным образом, если X, Y – любые операторы из $\mathrm{End}\,(\mathbb{C}^2)$, то $P_{12}\, X \otimes Y = Y \otimes X\, P_{12}$. Если ввести обозначения $\vec{\sigma}^{(1)} = \vec{\sigma} \otimes 1$, $\vec{\sigma}^{(2)} = 1 \otimes \vec{\sigma}$, тождество (1.1) можно записать также в виде

$$P_{12} = \frac{1}{2}\,(1 + \vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)}) \tag{1.2}$$

(здесь $\vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)}$ понимается как скалярное произведение "векторов" $\vec{\sigma}^{(1)}$ и $\vec{\sigma}^{(2)}$, т.е. сумма произведений одноименных компонент). Удобно также ввести подобные этим обозначения и в случае, когда тензорных сомножителей больше, чем два. Именно, определим операторы $\vec{\sigma}^{(j)} \in \mathrm{End}\,(\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2}_{N \text{ раз}})$ следующим образом:

$$\vec{\sigma}^{(j)} = \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{j-1} \otimes \vec{\sigma} \otimes \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{N-j}$$

Очевидно, если номера j и k различны, компоненты вектора $\vec{\sigma}^{(j)}$ коммутируют с компонентами $\vec{\sigma}^{(k)}$, поскольку нетривиально действуют в разных пространствах.

Пространство состояний. Рассмотрим линейное пространство

$$\mathcal{H} = \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2}_{N \text{ раз}}$$

Будем называть его *пространством состояний.* (Состояние – это любой вектор из $\mathcal{H}$. Если два вектора отличаются умножением на комплексное число, они задают одно и то же состояние.)

В квантовой механике это пространство состояний системы из n неподвижных атомов, обладающих магнитными моментами, которые мы для краткости будем называть *спинами.* (Остальные степени свободы, которыми может обладать атом, в этой упрощенной картине не учитываются.) Пространство состояний каждого спина двумерно (спин 1/2).

Выберем базис в $\mathbb{C}^2$ следующим образом:

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В состоянии $|+\rangle$ z-проекция спина равна $+1$ (стрелка вверх). Аналогично, в состоянии $|-\rangle$ z-проекция спина равна -1 (стрелка вниз). Для краткости мы будем говорить, что в первом случае спин направлен вверх, а во втором вниз. Все остальные квантовомеханические состояния, в которых может находиться спин, являются линейными комбинацией этих двух с комплексными коэффициентами. В таких состояниях проекция спина на ось z, вообще говоря, не имеет определенного значения.

Матрицы Паули $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – это операторы проекций спина на оси x, y, z (более точно, в физике оператором спина 1/2 называется не $\vec{\sigma}$, а $\frac{1}{2}\vec{\sigma}$, при этом возможные значения проекций спина равны $\pm\frac{1}{2}$). Поскольку они не коммутируют, определенное значение ($+1$ или -1) может иметь проекция спина только на одну какую-то ось. Мы, очевидно, имеем: $\sigma_z\left|+\right\rangle = \left|+\right\rangle$, $\sigma_z\left|-\right\rangle = -\left|-\right\rangle$.

Базисные векторы в $\mathcal{H}$ естественно выбрать в виде тензорных произведений базисных векторов в каждом тензорном сомножителе. Например:

$$\left|+\right\rangle \otimes \left|+\right\rangle \otimes \left|-\right\rangle \otimes \left|+\right\rangle \otimes \left|-\right\rangle \otimes \left|-\right\rangle \otimes \ \ldots \ \otimes \left|-\right\rangle \otimes \left|+\right\rangle$$

что мы будем также записывать как

$$\left|+\right\rangle_1 \left|+\right\rangle_2 \left|-\right\rangle_3 \left|+\right\rangle_4 \left|-\right\rangle_5 \left|-\right\rangle_6 \ \ldots \ \left|-\right\rangle_{N-1} \left|+\right\rangle_N$$

или просто $\left|++-+-- \ \ldots \ -+\right\rangle$. Это состояние, в котором первый спин имеет z-проекцию $+1$, второй $+1$, третий -1 и т.д. Всего таких векторов будет 2^N, т.е. $\dim \mathcal{H} = 2^N$.

Наконец, введем в $\mathcal{H}$ скалярное произведение (с его помощью будут выражаться физические величины). Для этого в каждом пространстве $\mathbb{C}^2$ зададим скалярное произведение естественной формулой $\left\langle \epsilon \right| \epsilon' \rangle = \delta_{\epsilon,\epsilon'}$, где $\epsilon, \epsilon' = \pm$ и продолжим его на их тензорное произведение по правилу

$$\left\langle \epsilon_1 \epsilon_2 \ldots \epsilon_n \right| \epsilon_1' \epsilon_2' \ldots \epsilon_n' \rangle = \prod_{i=1}^{N} \delta_{\epsilon_i, \epsilon_i'}$$

Оператор полного спина и разбиение пространства состояний на сектора. Оператор

$$\vec{S} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\sigma}^{(j)}$$

по понятной причине называется оператором полного спина системы атомов. По аналогии можно ввести также $S_\pm = \frac{1}{2}(S_x \pm iS_y)$. Коммутационные соотношения для этих операторов, очевидно, такие же, как для матриц Паули, т.е. $[S_z, S_\pm] = \pm 2S_\pm$, $[S_+, S_-] = S_z$, но S_x^2, S_y^2, S_z^2, конечно, уже не равны единичным операторам, как и $S_\pm^2 \neq 0$.

Легко видеть, что все базисные векторы в $\mathcal{H}$, в которых m спинов смотрят вниз, а остальные $N-m$ вверх (независимо от порядка их расположения), являются собственными для оператора S_z с собственным значением $N-2m$. В соответствии с этим пространство $\mathcal{H}$ можно представить в виде прямой суммы подпространств $\mathcal{H}(m)$ при $m = 0, 1, 2, \ldots, N$, на которых z-проекция полного спина равна $N-2m$:

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{j=1}^{N} \mathbb{C}^2 = \bigoplus_{m=0}^{N} \mathcal{H}(m) \tag{1.3}$$

Легко найти, что

$$\dim \mathcal{H}(m) = \begin{pmatrix} N \\ m \end{pmatrix} = \frac{N!}{m!(N-m)!}$$

В частности, $\mathcal{H}(0)$ и $\mathcal{H}(N)$ – одномерные пространства, порождаемые, соответственно, состоянием, в котором все спины смотрят вверх (вниз). О разложении (1.3) говорят как о разбиении полного пространства состояний на сектора с фиксированной проекцией полного спина.

Отметим, что операторы $\sigma_z^{(j)}$ переводят каждое из подпространств $\mathcal{H}(m)$ в себя, а операторы $\sigma_\pm^{(j)}$ действуют так: $\sigma_\pm^{(j)} : \mathcal{H}(m) \to \mathcal{H}(m \mp 1)$.

1.1.2 Изотропный магнетик Гейзенберга (XXX-модель)

Основная задача состоит в диагонализации следующего оператора из $\mathrm{End}(\mathcal{H})$:

$$H(J_x, J_y, J_z) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(J_x\sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(k+1)} + J_y\sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)} + J_z\sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)}\right), \quad \vec{\sigma}^{(N+1)} \equiv \vec{\sigma}^{(1)} \tag{1.4}$$

который можно понимать как $2^N \times 2^N$-матрицу специального вида. Физический интерес представляет нахождение его собственных чисел и собственных векторов в пределе $N \to \infty$ (так называемом термодинамическом пределе).

Данный оператор служит квантовомеханической моделью цепочки одинаковых атомов, обладающих магнитными моментами (спинами). Каждый спин приписан к своему узлу (атому) в цепочке. Отождествление $\vec{\sigma}^{(N+1)} \equiv \vec{\sigma}^{(1)}$ означает наложение периодических граничных условий (замкнутая цепочка). Взаимодействуют между собой только ближайшие соседи. Сила взаимодействия характеризуется константами J_x, J_y, J_z.

Эта модель была предложена (в частном случае $J_x = J_y = J_z$) одним из создателей квантовой механики В.Гейзенбергом в 20-х годах 20-го века. Оператор $H(J_x, J_y, J_z)$ называется *гамильтонианом* модели. Его собственные числа (спектр) – это возможные значения энергии, которой может обладать данная система спинов.

Случай, когда только одна из констант отлична от 0 (например, $J_x = J_y = 0$, $J_z \neq 0$) легко сводится к одномерной модели Изинга, которая может быть полностью решена элементарными методами. Случай, когда две константы из трех отличны от 0, также эквивалентен модели Изинга, но двумерной, полное решение которой уже нетривиально.

В теории интегрируемых систем принята следующая терминология. Если модель анизотропна (т.е. $J_x \neq J_y \neq J_z$), она называется XYZ-магнетиком, если $J_x = J_y \neq J_z$ – XXZ-магнетиком, и, наконец, если взаимодействие одинаково для всех трех направлений, т.е. $J_x = J_y = J_z$, – XXX-магнетиком (или, соответственно, XYZ-, XXZ-, XXX-моделью). Мы будем в основном заниматься XXX-моделью.

С чисто алгебраической точки зрения константы J_x, J_y, J_z могут быть любыми числами, в том числе комплексными. Важное физическое требование состоит, однако, в том, чтобы оператор $H(J_x, J_y, J_z)$ был эрмитовым, а его собственные значения тем самым были бы вещественными. Тогда константы J_x, J_y, J_z должны быть вещественными. Их знаки опять-таки не важны для алгебраических методов, но физические свойства модели могут существенно зависеть от того, положительны они или отрицательны. В следующей задаче предлагается показать, что при некоторых различных выборах знаков получаются унитарно эквивалентные операторы, что позволяет без потери общности ограничиться анализом случаев, в которых константы либо все отрицательны (ферромагнетик), либо все положительны (антиферромагнетик).

Задача. Пусть число узлов N четно. Показать, что

$$H(J_x, J_y, -J_z) = -\mathcal{U}_z H(J_x, J_y, J_z)(\mathcal{U}_z)^{-1}$$

где $\mathcal{U}_z = \sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(4)}\sigma_z^{(6)}\ldots\sigma_z^{(N)}$. Сформулировать и доказать аналогичные свойства для x- и y-направлений.

Вопрос. Можно ли сформулировать аналогичные утверждения в случае нечетного числа узлов?

Задача. Найти спектр гамильтониана XYZ-модели Гейзенберга для $N = 2$:

$$H = J_x\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)} + J_y\sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)} + J_z\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}$$

Отдельно рассмотреть случай изотропной XXX-модели ($J_x = J_y = J_z = J$).

Ниже мы подробно рассмотрим XXX-модель. Метод нахождения собственных векторов и спектра гамильтониана для нее был предложен в 1931 г. Гансом Бете (анзац Бете). Роль этого метода в теории интегрируемых систем выходит далеко за рамки конкретной модели.

Гамильтониан XXX-магнетика Гейзенберга возьмем в виде

$$\boxed{H^{\rm xxx} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Big(\sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)} + \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - \sigma_0^{(k)}\sigma_0^{(k+1)}\Big)}$$

По сравнению с (1.4) добавлен последний член, пропорциональный тождественному оператору. Это просто сдвигает спектр как целое на константу. Общий множитель выбран равным $-\frac{1}{2}$ (знак соответствует ферромагнитному случаю), но при необходимости множитель J может быть восстановлен заменой $H^{\rm xxx} \to H^{\rm xxx}/J$. Данный оператор можно представить в нескольких эквивалентных формах:

$$\begin{aligned}
H^{\rm xxx} &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Big(\sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)} + \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - 1\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Big(2\sigma_+^{(k)}\sigma_-^{(k+1)} + 2\sigma_-^{(k)}\sigma_+^{(k+1)} + \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - 1\Big) \qquad (1.5) \\
&= -\sum_{k=1}^{N} P_{k,k+1} + N
\end{aligned}$$

В последней строчке $P_{k,k+1}$ – это оператор, переставляющий k-й и $k+1$-й множители в тензорном произведении (аналогично оператору (1.2)), причем $P_{N,N+1} \equiv P_{N,1}$.

Задача. Доказать, что все собственные значения оператора $H^{\rm xxx}$ неотрицательны. (Подсказка: использовать тождество $\frac{1}{4}(1 - \vec\sigma^{(1)}\vec\sigma^{(2)})^2 = 1 - \vec\sigma^{(1)}\vec\sigma^{(2)}$.)

1.1.3 Построение собственных векторов в XXX-модели

Два собственных вектора оператора $H^{\rm xxx}$ найти очень легко. Из представления гамильтониана XXX-модели в виде $H^{\rm xxx} = -\sum\limits_{k=1}^{N} P_{k,k+1} + N$ (последняя строчка в (1.5)) сразу следует, что векторы $|\Omega\rangle := |++++\ldots+\rangle$, $\left|\bar{\Omega}\right\rangle := |----\ldots-\rangle$ являются для него собственными с собственным значением 0:

$$H^{\rm xxx}\,|\Omega\rangle = H^{\rm xxx}\left|\bar{\Omega}\right\rangle = 0$$

Дальнейшая процедура предполагает, что мы выберем какой-нибудь один из них, например, $|\Omega\rangle$ (все спины вверх), а про существование второго на долгое время забудем. Физики называют вектор $|\Omega\rangle$ *вакуумом* (часто голым или ложным), и построение остальных собственных состояний гамильтониана интерпретируют как рождение в вакууме каких-то "возбуждений" или "квазичастиц".

Важное замечание, позволяющее упростить процедуру нахождения остальных собственных векторов, состоит в том, что гамильтониан изотропной модели Гейзенберга коммутирует с оператором z-проекции полного спина:

$$[H^{\rm xxx},\, S_z] = 0 \tag{1.6}$$

(это верно и для XXZ-модели, но не верно для XYZ). Опять-таки это легче всего проверить, пользуясь представлением гамильтониана в виде суммы операторов перестановки. Более того, в XXX-модели в силу равноправия всех трех направлений верно также, что

$$[H^{\rm xxx},\, \vec{S}] = 0 \tag{1.7}$$

(это уже не так для XXZ). Следствия этой глобальной $SU(2)$-инвариантности мы обсудим позднее, а пока нам нужна будет только инвариантность относительно картановской подгруппы $U(1)$, выражаемая соотношением (1.6). Из него следует, что операторы $H^{\rm xxx}$ и S_z имеют общие собственные вектора. А это значит, что собственные векторы $H^{\rm xxx}$ всегда имеют определенную z-проекцию спина, т.е. их можно искать отдельно в каждом секторе $\mathcal{H}(m)$ разложения (1.3). Мы уже видели это на простейшем примере: $|\Omega\rangle \in \mathcal{H}(0)$.

Выше было отмечено, что спектр оператора $H^{\rm xxx}$ неотрицателен. Отсюда и из результата следующей ниже задачи заключаем, что основное состояние имеет $E = 0$ и как минимум N-кратно вырождено.

Задача. Показать, что $H^{\rm xxx}\,|\Omega_m\rangle = 0$, $S_z\,|\Omega_m\rangle = (N-2m)\,|\Omega_m\rangle$, где $|\Omega_m\rangle = S_-^m\,|\Omega\rangle$. Как устроены векторы $|\Omega_m\rangle$?

Обратим внимание на то, что кроме проекций полного спина имеется еще один оператор, коммутирующий с гамильтонианом, – это оператор e^{iP} сдвига на узел, действующий на базисные векторы сдвигом на один шаг решетки:

$$e^{iP}\,|\epsilon_1\rangle_1\,|\epsilon_2\rangle_2\,|\epsilon_3\rangle_3\,|\epsilon_4\rangle_4\;\ldots\;|\epsilon_{n-1}\rangle_{N-1}\,|\epsilon_n\rangle_N = |\epsilon_2\rangle_1\,|\epsilon_3\rangle_2\,|\epsilon_4\rangle_3\,|\epsilon_5\rangle_4\;\ldots\;|\epsilon_N\rangle_{N-1}\,|\epsilon_1\rangle_N$$

где $\epsilon_i = \pm$. С операторами $\vec{\sigma}^{(j)}$ он коммутирует по правилу $e^{iP}\,\vec{\sigma}^{(j+1)} = \vec{\sigma}^{(j)}e^{iP}$. Очевидно, оператор сдвига коммутирует с операторами проекций полного спина. Собственное значение оператора P физики называют квазиимпульсом. В дальнейшем мы для простоты будем называть его просто импульсом.

Итак, мы будем искать общие собственные состояния операторов $H^{\rm xxx}$, e^{iP} и S_z. Другими словами, будем искать стационарные состояния системы спинов с определенными значениями импульса и z-проекции полного спина.

Один перевернутый спин. Следующий по сложности (хотя тоже очень простой) случай – N-мерное подпространство $\mathcal{H}(1) \subset \mathcal{H}$ (один перевернутый спин), в котором должно быть N собственных векторов. Базисные векторы $\mathcal{H}(1)$ получаются действием операторов $\sigma_-^{(j)}$ на вектор $|\Omega\rangle$. Будем искать собственные векторы оператора $H^{\rm xxx}$ в виде

$$|\Psi^{(1)}\rangle = \sum_{k=1}^{N} a(k)\, \sigma_-^{(k)}\, |\Omega\rangle$$

где $a(k)$ – неизвестные пока коэффициенты, удовлетворяющие условию периодичности $a(k+N) = a(k)$. Физики называют $a(k)$ одночастичной волновой функцией (в координатном представлении), а ее значение в узле k – амплитудой вероятности переворота k-го спина. Введем временное обозначение $\sigma_-^{(j)}\, |\Omega\rangle = |j\rangle$. Нетрудно убедиться, что оператор $\mathcal{P} \equiv \sum_k P_{k,k+1}$ переводит вектор $|j\rangle$ в

$$(N-2)\, |j\rangle + |j+1\rangle + |j-1\rangle = N\, |j\rangle + |j+1\rangle + |j-1\rangle - 2\, |j\rangle\,,$$

так что секулярное уравнение $H^{\rm xxx} V = EV$ с собственным значением E эквивалентно следующему линейному разностному уравнению на коэффициенты $a(k)$:

$$-a(k+1) - a(k-1) + 2a(k) = Ea(k) \tag{1.8}$$

Решение можно искать в виде $a(k) = e^{ipk}$ с $0 \le p < 2\pi$, тогда

$$|\Psi^{(1)}\rangle = |\Psi^{(1)}(p)\rangle = \sum_{k=1}^{N} e^{ipk}\, \sigma_-^{(k)}\, |\Omega\rangle\,, \qquad E = 2(1-\cos p) = 4\sin^2(p/2).$$

Однако, мы должны еще удовлетворить условию периодичности $a(k+N) = a(k)$. Оно приводит к тому, что параметр p (импульс) может принимать конечный набор значений

$$p = p_\ell = \frac{2\pi\ell}{N}, \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

Итак, мы нашли N собственных векторов вида

$$|\Psi^{(1)}\rangle = |\Psi_\ell^{(1)}\rangle = \sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i\ell j/N} \sigma_-^{(j)}\, |\Omega\rangle\,, \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

с собственными значениями $E_\ell = 2\Big(1 - \cos\frac{2\pi\ell}{N}\Big)$, причем $E_\ell > 0$ при $\ell \neq 0$ (состояние с $\ell = 0$ – это $S_-\, |\Omega\rangle$). Эти состояния вырождены, поскольку все состояния вида $S_-^m |\Psi_\ell^{(1)}\rangle$ с $1 < m \le N-1$ – тоже собственные с той же энергией. Очевидно, $S_z |\Psi_\ell^{(1)}\rangle = (N-2)|\Psi_\ell^{(1)}\rangle$. Легко также проверить, что построенные состояния являются для оператора сдвига собственными: $e^{iP}|\Psi^{(1)}(p)\rangle = e^{ip}|\Psi^{(1)}(p)\rangle$ или

$$e^{iP}|\Psi_\ell^{(1)}\rangle = e^{2\pi i\ell/N}|\Psi_l^{(1)}\rangle$$

В пределе $N \to \infty$ возможные значения p заполняют отрезок от 0 до 2π. В физике твердого тела такие возбуждения называют магнонами. При малых p зависимость энергии магнона от его импульса такая же, как для обычных свободно движущихся массивных нерелятивистских частиц: $E(p) \approx p^2$. Если вспомнить о константе J, мы получили бы $E(p) \approx Jp^2$, так что $(2J)^{-1}$ играет роль массы этих частиц.

Задача. Доказать, что $S_+|\Psi_\ell^{(1)}\rangle = 0$ при $\ell \neq 0$. (Это означает, что векторы $|\Psi_\ell^{(1)}\rangle$ при $\ell \neq 0$ являются старшими относительно действия группы $SU(2)$.)

Задача. а) Найти норму построенных векторов относительно введенного ранее скалярного произведения в $\mathcal{H}$; б) Доказать, что $\left\langle \Psi_l^{(1)} \middle| \Psi_{l'}^{(1)} \right\rangle = 0$ при $l \neq l'$.

Два перевернутых спина. В подпространстве $\mathcal{H}(2) \subset \mathcal{H}$ (два перевернутых спина) должно быть $N(N-1)/2$ собственных вектора. Их можно искать в виде

$$\left|\Psi^{(2)}\right\rangle = \sum_{1 \le k_1 < k_2 \le N} a(k_1, k_2)\, \sigma_-^{(k_1)} \sigma_-^{(k_2)} \left|\Omega\right\rangle$$

где $a(k_1, k_2)$ – неизвестные пока коэффициенты, удовлетворяющие условиям периодичности, которые будут учтены ниже. Физики называют $a(k_1, k_2)$ двухчастичной волновой функцией (в координатном представлении). Далее в этом разделе будем писать просто $|\Psi\rangle$ вместо $\left|\Psi^{(2)}\right\rangle$.

Уравнение на собственные значения оператора $H^{\text{xxx}} = N - \mathcal{P}$, где $\mathcal{P} \equiv \sum_{k=1}^{N} P_{k,k+1}$:

$$\mathcal{P}\left|\Psi\right\rangle = (N - E)\left|\Psi\right\rangle$$

Нам надо извлечь из него соотношения на коэффициенты $a(k_1, k_2)$, аналогичные (1.8). Для этого свернем обе части с ковектором $\langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)} \sigma_+^{(n_1)}$,

$$\langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)} \sigma_+^{(n_1)} \mathcal{P}\left|\Psi\right\rangle = (N - E)\,\langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)} \sigma_+^{(n_1)} \left|\Psi\right\rangle$$

и пронесем операторы перестановки налево, где они, подействовав на левый вакуум, благополучно исчезнут, поскольку вакуумное состояние инвариантно относительно любых перестановок (все спины смотрят вверх). Правило проноса таково:

$$\sigma_+^{(n)} P_{k,k+1} = P_{k,k+1}\Big[\sigma_+^{(n)} + \delta_{kn}(\sigma_+^{(n+1)} - \sigma_+^{(n)}) + \delta_{k+1,n}(\sigma_+^{(n-1)} - \sigma_+^{(n)})\Big]$$

Применив его два раза, получим:

$$\begin{aligned}
& \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)} \sigma_+^{(n_1)} P_{k,k+1} \\
= \;& \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)} \sigma_+^{(n_1)} \\
& + \delta_{kn_1} \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)} (\sigma_+^{(n_1+1)} - \sigma_+^{(n_1)}) + \delta_{k+1,n_1} \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)} (\sigma_+^{(n_1-1)} - \sigma_+^{(n_1)}) \\
& + \delta_{kn_2} \langle\Omega|\, (\sigma_+^{(n_2+1)} - \sigma_+^{(n_2)}) \sigma_+^{(n_1)} + \delta_{k+1,n_2} \langle\Omega|\, (\sigma_+^{(n_2-1)} - \sigma_+^{(n_2)}) \sigma_+^{(n_1)} \\
& + \delta_{kn_1} \delta_{k+1,n_2} \langle\Omega|\, (\sigma_+^{(n_2-1)} - \sigma_+^{(n_2)})(\sigma_+^{(n_1+1)} - \sigma_+^{(n_1)}) \\
& + \delta_{kn_2} \delta_{k+1,n_1} \langle\Omega|\, (\sigma_+^{(n_2+1)} - \sigma_+^{(n_2)})(\sigma_+^{(n_1-1)} - \sigma_+^{(n_1)})
\end{aligned}$$

Далее просуммируем по k и воспользуемся тождеством $a(n_1, n_2) = \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)} \sigma_+^{(n_1)} |\Psi\rangle$ (при $n_1 < n_2$). В случае $n_1 < n_2 - 1$ (но $(n_1, n_2) \neq (1, N)$) последние две строчки не работают, и мы получаем уравнение

$$a(n_1+1, n_2)+a(n_1-1, n_2)+a(n_1, n_2+1)+a(n_1, n_2-1)-4a(n_1, n_2) = -Ea(n_1, n_2) \quad (1.9)$$

по каждой из переменных такое же, как и (1.8). Если же $n_1 = n_2 - 1 = n$, в игру вступает также и предпоследняя строчка, и мы получаем:

$$a(n, n+2) + a(n-1, n+1) - 2a(n, n+1) = -Ea(n, n+1) \quad (1.10)$$

Наконец, если $n_1 = 1$, $n_2 = N$, вместо предпоследней вклад дает последняя строчка:

$$a(1, N-1) + a(2, N) - 2a(1, N) = -Ea(1, N) \quad (1.11)$$

Забудем пока про уравнения (1.10) и (1.11), которые вступают в силу только для ближайших соседей, и попытаемся найти возможно более общее общее решение уравнения (1.9), распространив его на все возможные значения n_1, n_2 и не накладывая пока никаких дополнительных условий типа периодичности. Очевидно, одно из решений уравнения (1.9) при всех n_1, n_2 – это $a(n_1, n_2) = e^{ip_1 n_1 + ip_2 n_2}$ с энергией $E = 2(1 - \cos p_1) + 2(1 - \cos p_2)$ и импульсом $P = p_1 + p_2$. Каково общее решение с данными энергией и импульсом? Можно было бы рассмотреть любую линейную комбинацию решений вида $e^{\pm ip_1 n_1 \pm ip_2 n_2}$. Все они имеют одну и ту же энергию, но их суперпозиции нам не подходят, поскольку они не будут собственными для оператора сдвига. Но есть еще одна возможность: взять

$$a(n_1, n_2) = Ae^{ip_1 n_1 + ip_2 n_2} + Be^{ip_2 n_1 + ip_1 n_2} \quad (1.12)$$

с произвольными A, B, при этом по-прежнему $E = 2(1 - \cos p_1) + 2(1 - \cos p_2)$, и $P = p_1 + p_2$, т.е.

$$a(n_1 + 1, n_2 + 1) = e^{i(p_1 + p_2)} a(n_1, n_2). \quad (1.13)$$

Но с этим решением пока тоже еще не все в порядке: при произвольных A и B оно не удовлетворяет уравнению (1.10). Посмотрим (вслед за Г.Бете), нельзя ли подобрать A и B так, чтобы это уравнение тоже удовлетворилось. Вычтем (1.10) из (1.9) при $n_1 = n_2 - 1 = n < N$, чтобы исключить E. Получим дополнительное условие

$$a(n, n) + a(n+1, n+1) = 2a(n, n+1), \quad 1 \leq n < N, \quad (1.14)$$

которому должна удовлетворять волновая функция (1.12). Надо еще получить аналогичное условие на конце цепочки (на самом деле свернутой в кольцо), т.е. при $n = N$. Для этого вычтем (1.11) из (1.9) при $n_1 = 1$, $n_2 = N$, получим условие

$$a(0, N) + a(1, N+1) = 2a(1, N)$$

Но в силу N-периодичности $a(0, N) = a(N, N)$, $a(1, N+1) = a(1, 1)$, $a(N, N+1) = a(1, N)$, так что это условие совпадает с (1.14), взятом при $n = N$. Подставив (1.14) в (1.12), найдем, что (1.12) является решением, если коэффициенты A, B связаны формулой

$$\frac{A}{B} = -\frac{1 + e^{i(p_1+p_2)} - 2e^{ip_1}}{1 + e^{i(p_1+p_2)} - 2e^{ip_2}} := e^{i\theta(p_1, p_2)}$$

Для краткости мы часто будем писать $\theta_{12} = \theta(p_1, p_2) = -\theta_{21}$. Итак, окончательный ответ:

$$\boxed{a(n_1, n_2) = e^{i(p_1 n_1 + p_2 n_2 + \frac{\theta_{12}}{2})} + e^{i(p_2 n_1 + p_1 n_2 + \frac{\theta_{21}}{2})} \quad (\text{при } n_1 < n_2)} \tag{1.15}$$

Упражнение. Проверить, что $2\mathrm{ctg}\,\dfrac{\theta_{12}}{2} = \mathrm{ctg}\,\dfrac{p_1}{2} - \mathrm{ctg}\,\dfrac{p_2}{2}$.

На бесконечной цепочке параметры p_1, p_2 произвольны. Но наша цепочка свернута в кольцо (N-периодична). Имеется очевидное условие периодичности

$$a(n_1 + N, n_2 + N) = a(n_1, n_2) \tag{1.16}$$

которое выражает просто тот факт, что систему как целое можно повернуть на 360°, и она тождественно перейдет в себя. Это условие влечет за собой квантование полного импульса: $p_1 + p_2 = \frac{2\pi l}{N}$, $l = 0, 1, \ldots N-1$, как и в случае одного магнона.

Есть и более тонкое условие периодичности. Поясним его на примере амплитуды $a(1, 2)$. Как она связана с амплитудой $a(1, N)$? На свернутой в кольце цепочке они *должны быть* связаны, поскольку в обоих случаях они соответствуют состояниям с двумя соседними перевернутыми спинами. Эти состояния отличаются только общим сдвигом на 1 узел. Вспоминая (1.13), можем поэтому написать $a(1, 2) = e^{i(p_1+p_2)}a(1, N)$. Но согласно тому же уравнению (1.13), $e^{i(p_1+p_2)}a(1, N) = a(2, N+1)$, так что мы должны потребовать $a(1, 2) = a(2, N+1)$.

Рассмотрим теперь $a(1, n)$ при $1 < n$. Как связаны амплитуды $a(1, n)$ и $a(1, N-n+2)$? Обе амплитуды соответствуют состояниям, в которых перевернутые спины разделены $n-1$ ребрами решетки. Они отличаются общим сдвигом на $n-1$ узел, и, следовательно, $a(1, n) = e^{i(n-1)(p_1+p_2)}a(1, N-n+2)$. Но $e^{i(n-1)(p_1+p_2)}a(1, N-n+2) = a(n, N+1)$, и, значит, мы должны потребовать $a(1, n) = a(n, N+1)$. Наконец, сдвинув это условие как целое вдоль цепочки на k шагов, получим $a(k+1, n+k) = a(n+k, N+k+1)$, что можно записать в виде

$$\boxed{a(n_1, n_2) = a(n_2, n_1 + N) \qquad (\text{при } 1 \le n_1 < n_2 \le N)} \tag{1.17}$$

Это условие выражает собой периодичность при сдвиге на N *одной* из переменных (n_1) при фиксированном значении n_2. Аналогичное условие имеет место и для сдвига n_2, оно является следствием (1.16) и (1.17). Отметим, что было бы *неверно* написать просто $a(n_1+N, n_2) = a(n_1, n_2)$, поскольку наша волновая функция определена только при $n_1 < n_2$, а при сдвиге $n_1 \to n_1 + N$ относительное расположение аргументов меняется. Это довольно тонкий момент, и его надо как следует продумать прежде чем двигаться дальше.

Другой способ понять это условие периодичности заключается в том, чтобы продолжить волновую функцию на область $n_1 > n_2$ наложением естественного требования симметрии при перестановке аргументов: $a(n_1, n_2) = a(n_2, n_1)$. Легко видеть, что продолженная таким образом функция дается формулой

$$a^{\text{symm}}(n_1, n_2) = e^{i(p_1 n_1 + p_2 n_2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}(n_2 - n_1)\theta_{12})} + e^{i(p_2 n_1 + p_1 n_2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}(n_2 - n_1)\theta_{21})} \tag{1.18}$$

На такую функцию можно накладывать условие периодичности в обычном виде $a(n_1+N, n_2) = a(n_1, n_2)$. Легко видеть, что оно эквивалентно (1.17).

Из условия периодичности сразу следуют ограничения на возможные значения p_1, p_2:

$$\begin{cases} e^{ip_1 N} = e^{i\theta(p_1,p_2)} \\ e^{ip_2 N} = e^{-i\theta(p_1,p_2)} \end{cases} \tag{1.19}$$

Это простейший пример системы уравнений Бете. Физики интерпретируют их следующим образом. Первый магнон, облетая цепочку по кругу, приобретает фазу, которая должна быть кратна 2π. С другой стороны, эта фаза складывается из фазы свободного движения $p_1 N$ и фазы рассеяния на втором магноне, которая равна $\theta(p_2, p_1)$. Первое уравнение Бете как раз говорит, что их сумма кратна 2π. Аналогично для второго магнона.

Задача. Найти решения системы уравнений Бете такие, что $p_1 = p_2$, а также найти соответствующие собственные векторы гамильтониана XXX-цепочки.

Результат этой задачи указывает на то, что не все решения уравнений Бете отвечают нетривиальным собственным состояниям.

Удобно переписать уравнения Бете в другой параметризации, в которой они становятся алгебраическими. Например, можно положить $e^{ip_1} = z_1$, $e^{ip_2} = z_2$, и тогда

$$\begin{cases} z_1^N = -\dfrac{1+z_1z_2-2z_1}{1+z_1z_2-2z_2} \\[2ex] z_2^N = -\dfrac{1+z_1z_2-2z_2}{1+z_1z_2-2z_1} \end{cases}$$

Но в дальнейшем окажется удобнее другая параметризация. Вместо p введем параметр λ следующим образом:

$$e^{ip} = \frac{\lambda+\frac{i}{2}}{\lambda-\frac{i}{2}}, \qquad \text{или} \qquad \lambda = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{p}{2} \tag{1.20}$$

Этот параметр иногда называют *быстротой*, – по-видимому, по смутной аналогии с релятивистской кинематикой. А по причине, которая выяснится позднее, его также называют *спектральным параметром*. Введем полезные в дальнейшем функции

$$\begin{aligned} p(\lambda) &:= -i\log\frac{\lambda+\frac{i}{2}}{\lambda-\frac{i}{2}} = -2\operatorname{arctg}(2\lambda)+\pi \pmod{2\pi} \\ \varepsilon(\lambda) &:= 2(1-\cos p(\lambda)) = \frac{1}{\lambda^2+\frac{1}{4}} \end{aligned} \tag{1.21}$$

которые имеют смысл импульса и энергии свободного магнона со спектральным параметром λ. Путем прямого вычисления можно убедиться, что

$$e^{i\theta(p_1,p_2)} = \frac{\lambda_1-\lambda_2+i}{\lambda_1-\lambda_2-i} \tag{1.22}$$

т.е. сдвиг фазы при рассеянии двух магнонов зависит только от разности их быстрот, и в этом основное преимущество λ-параметризации. Система уравнений Бете запишется в виде

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_1 - \frac{i}{2}}{\lambda_1 + \frac{i}{2}}\right)^N &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2 - i}{\lambda_1 - \lambda_2 + i} \\ \left(\frac{\lambda_2 - \frac{i}{2}}{\lambda_2 + \frac{i}{2}}\right)^N &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1 - i}{\lambda_2 - \lambda_1 + i} \end{aligned}\right. \tag{1.23}$$

Посмотрим, как выглядят ее решения при $N \to \infty$. Извлечем корень N-й степени:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\lambda_1 - \frac{i}{2}}{\lambda_1 + \frac{i}{2}} &= \omega_1 e^{\frac{i}{N}\theta_{12}} \\ \frac{\lambda_2 - \frac{i}{2}}{\lambda_2 + \frac{i}{2}} &= \omega_2 e^{-\frac{i}{N}\theta_{12}} \end{aligned}\right.$$

где $\omega_{1,2}$ – два произвольных корня N-й степени из 1. В пределе $N \to \infty$ их аргументы независимо пробегают интервал $[0, 2\pi)$, а экспоненты в правых частях стремятся 1, так что переменные разделяются, и уравнения решаются тривиально. Физически полученные собственные векторы интерпретируются как состояния рассеяния двух магнонов.

Однако уравнения (1.23) могут иметь и комплексные решения. Положим $\lambda_1 = u_1 + iv_1$, $\lambda_2 = u_2 + iv_2$. Модуль первого уравнения дает:

$$\left(\frac{u_1^2 + (v_1 - \frac{1}{2})^2}{u_1^2 + (v_1 + \frac{1}{2})^2}\right)^N = \frac{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2 - 1)^2}{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2 + 1)^2}$$

Пусть $v_1 > 0$, тогда левая часть экспоненциально мала при $N \to \infty$. Таким образом, с экспоненциальной точностью имеем $u_1 = u_2$, $v_1 - v_2 = 1$. Взяв по модулю обе части второго уравнения, видим, что $v_2 < 0$. Перемножив два уравнения, получим:

$$\left(\frac{u_1 + i(v_1 - \frac{1}{2})}{u_1 + i(v_1 + \frac{1}{2})} \cdot \frac{u_2 + i(v_2 - \frac{1}{2})}{u_2 + i(v_2 + \frac{1}{2})}\right)^N = 1$$

Подставив сюда $u_1 = u_2$, $v_1 - v_2 = 1$, придем к соотношению

$$\left(\frac{u_1 + i(v_1 - \frac{3}{2})}{u_1 + i(v_1 + \frac{1}{2})}\right)^N = 1$$

откуда $v_1 = \frac{1}{2}$. Итак, с экспоненциальной точностью при $N \to \infty$ имеем семейство решений

$$\lambda_1 = u + \frac{i}{2}, \qquad \lambda_2 = u - \frac{i}{2} \tag{1.24}$$

На жаргоне специалистов по анзацу Бете такое решение называется *струной*. В данном случае это струна длины 2. Вещественный параметр u произволен. Через него выражается полный импульс данного состояния и его энергия:

$$\begin{aligned} p(\lambda_1, \lambda_2) &= p(\lambda_1) + p(\lambda_2) = p(u/2) = -i \log \frac{u+i}{u-i} \\ E(\lambda_1, \lambda_2) &= \varepsilon(\lambda_1) + \varepsilon(\lambda_2) = 1 - \cos p(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{2}{u^2+1} \end{aligned} \tag{1.25}$$

Упражнение. Вывести эти формулы.

Задача. Доказать, что $E(u+\frac{i}{2}, u-\frac{i}{2})$ всегда меньше, чем энергия двух магнонов с импульсами p_1 и p_2 такими, что $p_1 + p_2 = p(u + \frac{i}{2}, u - \frac{i}{2}) = p(u/2)$. Поэтому данное состояние можно интерпретировать как связанное состояние двух магнонов. Описать качественно, как выглядит его волновая функция.

Вернемся к случаю конечных N и подведем итог. Мы построили собственные состояния оператора H^{xxx} вида $|\Psi(\lambda_1, \lambda_2)\rangle$, где λ_1, λ_2 – любое решение системы уравнений Бете (1.23). Их импульс и энергия даются формулами

$$p(\lambda_1, \lambda_2) = p(\lambda_1) + p(\lambda_2)$$

$$E(\lambda_1, \lambda_2) = \varepsilon(\lambda_1) + \varepsilon(\lambda_2)$$

Эти состояния вырождены, поскольку все состояния вида $S_-^m|\Psi(\lambda_1, \lambda_2)\rangle$ с $1 < m \leq N-2$ – тоже собственные с той же энергией. Очевидно, $S_z|\Psi(\lambda_1, \lambda_2)\rangle = (N-2)|\Psi(\lambda_1, \lambda_2)\rangle$.

Задача. Доказать, что $S_+|\Psi(\lambda_1, \lambda_2)\rangle = 0$. (Это означает, что векторы $|\Psi(\lambda_1, \lambda_2)\rangle$ являются старшими относительно действия группы $SU(2)$.)

Более двух перевернутых спинов: общий случай. То, что нам удалось диагонализовать гамильтониан в секторе с двумя перевернутыми спинами, не удивительно (задача двух тел всегда решается). Замечательно то, что тот же метод позволяет продвинуться гораздо дальше и решить задачу в секторе с любым количеством m перевернутых спинов.

Итак, собственные состояния оператора $H^{\text{xxx}} = N - \mathcal{P}$ в подпространстве $\mathcal{H}(m)$ будем искать в виде

$$|\Psi\rangle = \sum_{1\leq k_1<\ldots<k_m\leq N} a(k_1, \ldots, k_m)\, \sigma_-^{(k_1)} \ldots\, \sigma_-^{(k_m)}\, |\Omega\rangle$$

Уравнение на собственные значения такое же, как и ранее: $\mathcal{P}\,|\Psi\rangle = (N-E)\,|\Psi\rangle$ (напомним, что $\mathcal{P} = \sum_k P_{k,k+1}$). Аналогично тому, как мы это делали для двух спинов, свернем обе части с ковектором $\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_m)}$ (при $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$),

$$\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_m)}\mathcal{P}\,|\Psi\rangle = (N-E)\,\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_m)}\,|\Psi\rangle \tag{1.26}$$

и пронесем все операторы перестановки налево. Для сокращения записи правило проноса запишем в виде

$$\sigma_+^{(n)} P_{k,k+1} = P_{k,k+1}(\sigma_+^{(n)} + \beta_k^{(n)})$$

где

$$\beta_k^{(n)} \equiv \delta_{kn}(\sigma_+^{(n+1)} - \sigma_+^{(n)}) + \delta_{k+1,n}(\sigma_+^{(n-1)} - \sigma_+^{(n)})$$

Правая часть равенства (1.26) равна $(N-E)a(n_1, \ldots, n_m)$, а левая после проноса операторов перестановки налево выглядит следующим образом:

$$\sum_k \langle\Omega|\,(\sigma_+^{(n_1)} + \beta_k^{(n_1)})(\sigma_+^{(n_2)} + \beta_k^{(n_2)}) \ldots (\sigma_+^{(n_m)} + \beta_k^{(n_m)})\,|\Psi\rangle$$

Не очень вразумительно, но давайте посмотрим, что получается после раскрытия скобок и взятия суммы по k (от 1 до N). Во-первых, имеется член, не содержащий операторов $\beta_k^{(n)}$; он не зависит от k, и после взятия суммы дает

$$N \langle \Omega | \, \sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_m)} \, |\Psi\rangle \, .$$

Во-вторых, имеется m членов, в каждый из которых операторы β входят по одному разу. Они объединяются в выражение

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \langle \Omega | \, \sigma_+^{(n_1)} \ldots \cancel{\sigma}_+^{(n_\alpha)} \ldots \sigma_+^{(n_m)} \Big(\sum_k \beta_k^{(n_\alpha)} \Big) \, |\Psi\rangle$$

Здесь перечеркнутый оператор означает его отсутствие в данном месте. Легко видеть, что

$$\sum_k \beta_k^{(n)} = \sigma_+^{(n+1)} + \sigma_+^{(n-1)} - 2\sigma_+^{(n)},$$

так что эти члены имеют вполне ожидаемый вид, уже знакомый по предыдущим более простым случаям. Рассмотрим теперь члены, в которые операторы β входят по два раза:

$$\sum_{\substack{\alpha,\alpha'=1 \\ \alpha<\alpha'}}^{m} \langle \Omega | \, \sigma_+^{(n_1)} \ldots \cancel{\sigma}_+^{(n_\alpha)} \ldots \cancel{\sigma}_+^{(n_{\alpha'})} \ldots \sigma_+^{(n_m)} \Big(\sum_k \beta_k^{(n_\alpha)} \beta_k^{(n_{\alpha'})} \Big) \, |\Psi\rangle$$

Задача. Показать, что

$$\sum_k \beta_k^{(n_\alpha)} \beta_k^{(n_{\alpha'})} = 0 \quad \text{при } |\alpha' - \alpha| \geq 2 \ (\mathrm{mod}\ m)$$

$$\sum_k \beta_k^{(n_\alpha)} \beta_k^{(n_{\alpha+1})} = 2\, \delta_{n_\alpha+1, n_{\alpha+1}} \sigma_+^{(n_\alpha)} \sigma_+^{(n_\alpha+1)}$$

Отсюда следует, что квадратичные по β члены сворачиваются в выражение

$$2 \sum_{\alpha=1}^{m} \delta_{n_\alpha+1, n_{\alpha+1}} \langle \Omega | \, \sigma_+^{(n_1)} \ldots \, \sigma_+^{(n_m)} \, |\Psi\rangle$$

(Индекс α здесь и далее понимается по модулю m.) Наконец, посмотрим, что дают члены третьей и более высокой степени по β. И тут выясняется факт, благодаря которому метод Бете работает при $m > 2$:

$$\sum_k \beta_k^{(n_{\alpha_1})} \beta_k^{(n_{\alpha_2})} \ldots \beta_k^{(n_{\alpha_r})} = 0 \quad \text{при } r \geq 3 \text{ и всех } n_{\alpha_i}$$

Доказательство совсем нетрудное; провести его предлагается в качестве задачи. Поэтому членов, содержащих более двух операторов β в левой части (1.26) просто нет!

Собирая все вместе, имеем:

$$\langle \Omega | \, \sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_m)} (\mathcal{P} - N)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{m} \langle \Omega | \, \sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_{\alpha-1})} \sigma_+^{(n_\alpha+1)} \sigma_+^{(n_{\alpha+1})} \ldots \sigma_+^{(n_m)} + \sum_{\alpha=1}^{m} \langle \Omega | \, \sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_{\alpha-1})} \sigma_+^{(n_\alpha-1)} \sigma_+^{(n_{\alpha+1})} \ldots \sigma_+^{(n_m)}$$

$$+\,2\sum_{\alpha=1}^{m}(\delta_{n_\alpha+1,n_{\alpha+1}}-1)\,\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)}\ldots\sigma_+^{(n_m)} \tag{1.27}$$

В суммах по α индекс суммирования надо понимать по модулю m. Во второй сумме сдвинем индекс суммирования $\alpha\to\alpha+1$. После взятия скалярного произведения с вектором $|\Psi\rangle$ получим следующее уравнение на амплитуды $a(n_1,\ldots,n_m)$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^{m}(1-\delta_{n_\alpha+1,n_{\alpha+1}})\,a(n_1,\ldots,n_{\alpha-1},n_\alpha{+}1,n_{\alpha+1},\ldots,n_m)\\
+\;&\sum_{\alpha=1}^{m}(1-\delta_{n_\alpha,n_{\alpha+1}-1})\,a(n_1,\ldots,n_{\alpha-1},n_\alpha,n_{\alpha+1}{-}1,\ldots,n_m)\\
-\;&2\sum_{\alpha=1}^{m}(1-\delta_{n_\alpha+1,n_{\alpha+1}})\,a(n_1,\ldots,n_m)\;=\;-E\,a(n_1,\ldots,n_m)
\end{aligned}$$

Символы Кронекера в первых двух суммах возникли по следующей причине. В первой сумме член с $n_\alpha+1=n_{\alpha+1}$ соответствовал бы вектору $\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)}\ldots\sigma_+^{(n_{\alpha-1})}$, в котором есть два одинаковых оператора σ_+, а потому такой вектор зануляется, и его вклад в уравнении на волновую функцию надо исключить. С помощью операторов сдвига $e^{\pm\partial_{n_\alpha}}$ уравнение на волновую функцию можно записать несколько короче:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^{m}\Big(2-e^{\partial_{n_\alpha}}-e^{-\partial_{n_\alpha}}\Big)\,a(n_1,\ldots,n_m)+\sum_{\alpha=1}^{m}\delta_{n_\alpha+1,n_{\alpha+1}}\Big(2-e^{\partial_{n_\alpha}}-e^{-\partial_{n_\alpha}}\Big)\,a(n_1,\ldots,n_m)\\
&\qquad=\;E\,a(n_1,\ldots,n_m)
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Как и в случае $m=2$ будем искать решения среди функций $a(n_1,\ldots,n_m)$, удовлетворяющих уравнению

$$\sum_{\alpha=1}^{m}\Big(2-e^{\partial_{n_\alpha}}-e^{-\partial_{n_\alpha}}\Big)\,a(n_1,\ldots,n_m)=\;E\,a(n_1,\ldots,n_m) \tag{1.29}$$

при всех n_i, а оставшиеся члены в левой части обратятся в 0 при наложении дополнительных условий

$$a(n_1,\ldots,n_\alpha,n_\alpha,\ldots,n_m)+a(n_1,\ldots,n_\alpha{+}1,n_\alpha{+}1,\ldots,n_m)=2a(n_1,\ldots,n_\alpha,n_\alpha{+}1,\ldots,n_m) \tag{1.30}$$

Общее решение первого уравнения, собственное для оператора сдвига, таково:

$$a(n_1,\ldots,n_m)=\sum_{\sigma\in S_m}A_\sigma\exp\Big(i\sum_{j=1}^{m}p_{\sigma(j)}n_j\Big)$$

Внешняя сумма берется по всем $m!$ перестановкам индексов $\{1,2,\ldots,m\}$, а параметры p_α и коэффициенты A_σ произвольны. При этом импульс и энергия даются формулами

$$P=\sum_{\alpha=1}^{m}p_\alpha\,,\qquad E=2\sum_{\alpha=1}^{m}(1-\cos p_\alpha)$$

Аналогично случаю $m=2$ условия (1.30) налагают на коэффициенты A_σ соотношения, которые удается однозначно разрешить с точностью до общего множителя.

Подробный анализ предлагается проделать в качестве поучительного упражнения (если не в общем виде, то хотя бы для $m = 3$).

Результат имеет следующий вид (при $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_N \leq N$):

$$\boxed{a(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \exp\Big(i \sum_{j=1}^{m} p_{\sigma(j)} n_j + \frac{i}{2} \sum_{j<k} \theta_{\sigma(j)\sigma(k)}\Big)} \tag{1.31}$$

где фазы $\theta_{jk} \equiv \theta(p_j, p_k)$ определяются той же формулой

$$e^{i\theta(p_j,p_k)} = -\frac{1 + e^{i(p_j+p_k)} - 2e^{ip_j}}{1 + e^{i(p_j+p_k)} - 2e^{ip_k}}$$

что и раньше. Выражение (1.31) называется *волновой функцией Бете*. Как уже отмечалось, это состояние имеет энергию $E = 2\sum_{j=1}^{m}(1-\cos p_j)$. Аналогично (1.18), можно продолжить волновую функцию (1.31) симметричным образом во все области конфигурационного пространства с другим порядком расположения $n_1, n_2, \ldots, n_N$:

$$a^{\mathrm{symm}}(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \exp\Big(i \sum_{j=1}^{m} p_{\sigma(j)} n_j + \frac{i}{2} \sum_{j<k} \mathrm{sign}\,(n_k - n_j)\theta_{\sigma(j)\sigma(k)}\Big) \tag{1.32}$$

Условие периодичности запишется теперь так:

$$\boxed{a(n_1, n_2, \ldots, n_m) = a(n_2, n_3, \ldots, n_1 + N)} \tag{1.33}$$

что приводит к системе уравнений Бете:

$$e^{ip_j N} = \prod_{k \neq j} e^{i\theta(p_j,p_k)}, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{1.34}$$

В λ-параметризации она выглядит следующим образом:

$$\boxed{\left(\frac{\lambda_j - \frac{i}{2}}{\lambda_j + \frac{i}{2}}\right)^N = \prod_{k \neq j} \frac{\lambda_j - \lambda_k - i}{\lambda_j - \lambda_k + i}, \quad j = 1, \ldots, m.} \tag{1.35}$$

Упражнение. Вывести условие периодичности (1.33) для $m = 3$ с помощью рассуждения, аналогичного тому, которое было использовано при выводе условия (1.17).

Задача (сложная). Доказать, что все собственные состояния $\left|\Psi^{(m)}\right\rangle$, построенные по решениям уравнений Бете, являются старшими, т.е. $S_+\left|\Psi^{(m)}\right\rangle = 0$.

Решения системы (1.35) при $N \to \infty$ исследуются аналогично случаю двух магнонов. Вещественным решениям соответствуют состояния m независимых магнонов. Комплексные решения собираются в “струны”, длины которых могут быть равны $2M + 1 \leq m$, где $M \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Числа λ_k для струны длины $2M + 1$ таковы:

$$\lambda_k = u + ik, \quad k = -M, -M + 1, \ldots, M - 1, M,$$

где u – произвольный вещественный параметр. Например, струна длины 2 – это $\{u+\frac{i}{2}, u-\frac{i}{2}\}$, длины 3 – $\{u+i, u, u-i\}$, и т. д. Струны длины $2M+1 > 1$ интерпретируются как связанные состояния $2M+1$ магнонов. Сами магноны можно формально считать струнами длины 1 (в этом случае $M = 0$).

Задача. Вывести возможный вид струнных решений уравнений Бете в пределе $N \to \infty$.

Итак, в собственном состоянии общего вида числа λ_j объединяются в струны различной длины. Обозначим через ν_M число струн длины $2M + 1$ и через $\lambda_{j,M}$ ($j = 1, \ldots, \nu_M$) вещественные части параметров λ, входящих в струну с номером j. Полное число струн (включая струны длины 1) обозначим через Q. Имеем:

$$Q = \sum_{M \geq 0} \nu_M \,, \qquad m = \sum_{M \geq 0} (2M+1)\nu_M$$

Набор целых чисел $\{m, Q, \{\nu_M\}\}$, связанных этими соотношениями, характеризует состояние с точностью до задания Q вещественных чисел $\lambda_{j,M}$. Будем называть такой набор конфигурацией. Энергия и импульс состояния, отвечающего данной конфигурации, складываются из Q слагаемых, представляющих собой энергию и импульс отдельных струн (это верно с экспоненциальной точностью при $N \to \infty$).

Задача. Показать, что энергия и импульс струны длины $2M + 1$ с $\lambda_k = u + ik$ ($k = -M, -M+1, \ldots, M-1, M$) с экспоненциальной точностью при $N \to \infty$ даются формулами:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2M+1}\, \varepsilon\Big(\frac{u}{2M+1}\Big) = \frac{2M+1}{u^2 + (M+\frac{1}{2})^2} = \frac{2}{2M+1}\,(1 - \cos P), \\ P &= p\Big(\frac{u}{2M+1}\Big) = -2\mathrm{arctg}\, \frac{u}{M+\frac{1}{2}} + \pi \pmod{2\pi} \end{aligned} \tag{1.36}$$

При фиксированном m и $N \to \infty$ вещественные параметры $\lambda_{j,M}$ произвольны, подобно тому, как это было для $m = 2$. Если же N стремится к ∞ вместе с m, так что отношение m/N фиксировано, для параметров $\lambda_{j,M}$ заданной конфигурации можно вывести систему уравнений, которая получается из исходных уравнений Бете следующим образом. Для выделенной струны длины $2M + 1$ перемножим уравнения Бете для входящих в эту струну параметров λ_j. В правой части перемножим сомножители $\frac{\lambda_j - \lambda_k - i}{\lambda_j - \lambda_k + i}$ по k в соответствии с разбиением переменных λ на струны в данной конфигурации. Введем обозначение

$$V_0(\lambda) = \frac{\lambda - i}{\lambda + i}$$

Задача. Доказать тождества

$$\prod_{l=-M}^{M} V_0(2\lambda + 2il) = V_0\Big(\frac{2\lambda}{2M+1}\Big)$$

$$\prod_{l=-M}^{M} V_0(\lambda + il) = V_0\Big(\frac{\lambda}{M}\Big)V_0\Big(\frac{\lambda}{M+1}\Big) \equiv V_M(\lambda)$$

$$\prod_{l_1=-M_1}^{M_1}\prod_{l_2=-M_2}^{M_2} V_0(\lambda + i(l_1+l_2)) = \prod_{L=|l_i-l_2|}^{l_1+l_2} V_L(\lambda) \equiv V_{M_1,M_2}(\lambda)$$

Задача. Показать, что система уравнений на вещественные параметры $\lambda_{j,M}$ имеет вид

$$V_0^N\Big(\frac{\lambda_{j,M_1}}{M_1+\frac{1}{2}}\Big) = \prod_{M_2}\prod_{\substack{k=1\\(k,M_2)\neq(j,M_1)}}^{\nu_{M_2}} V_{M_1,M_2}(\lambda_{j,M_1}-\lambda_{k,M_2}) \tag{1.37}$$

Таким образом, при $N\to\infty$ собственные векторы гамильтониана XXX-цепочки представляют собой состояния рассеяния магнонов и их связанных состояний – струн длины больше 1.

1.1.4 Основное состояние антиферромагнитной цепочки

Рассмотрим теперь гамильтониан XXX-модели, взятый с другим знаком:

$$H^{\mathrm{xxx,AF}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Big(\sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)} + \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - \sigma_0^{(k)}\sigma_0^{(k+1)}\Big)$$

При этом во всех полученных выше выражениях для энергий m-магнонных состояний надо изменить знак. Это приведет к тому, что вакуум $|\Omega\rangle$ будет теперь обладать *максимальной* энергией (равной 0), а все состояния с каким-то количеством магнонов с ненулевыми импульсами будут иметь отрицательные значения энергии – тем меньшие, чем больше m. Физики поэтому говорят, что в этом случае $|\Omega\rangle$ – ложный вакуум, а настоящий (физический) вакуум, т.е. состояние с максимальной по модулю отрицательной энергией, получается заполнением ложного вакуума максимально возможным количеством магнонов. Здесь можно провести аналогию с морем Дирака.

В этом разделе мы будем считать, что N четно. Тогда основное состояние будет находиться в секторе с нулевой полной проекцией спина, т.е. будет иметь $m = N/2$ перевернутых спинов. Далее в этом разделе мы покажем, что уравнения Бете позволяют получить исчерпывающую информацию об этом состоянии при $N\to\infty$. Полное описание возбужденных состояний над физическим вакуумом тоже возможно (см., например, [5]), но мы ограничимся только анализом основного состояния. Можно показать, что в основном состоянии все λ_j вещественны, т.е. струн длины больше 1 нет.

Итак, рассмотрим систему уравнений (1.35) и перейдем в ней к логарифмам:

$$N\log\frac{\lambda_j-\frac{i}{2}}{\lambda_j+\frac{i}{2}}=\sum_{k=1,\neq j}^{N/2}\log\frac{\lambda_j-\lambda_k-i}{\lambda_j-\lambda_k+i}+2\pi i q_j,\quad j=1,\ldots,\frac{N}{2}\,,$$

или

$$Np(\lambda_j)=\sum_{k=1,\neq j}^{N/2}p\Big(\frac{\lambda_j-\lambda_k}{2}\Big)-2\pi q_j$$

где q_j – какие-то целые числа. Вспомнив, что $2\lambda=-\mathrm{tg}\,\dfrac{p-\pi}{2}$ (см. (1.20)), мы можем записать эти уравнения в виде

$$\mathrm{arctg}(2\lambda_j)=\frac{\pi}{N}\,Q_j+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N/2}\mathrm{arctg}(\lambda_j-\lambda_k)\,,\quad j=1,\ldots,\frac{N}{2}$$

где целые (при нечетных $N/2$) или полуцелые (при четных $N/2$) числа Q_j связаны с исходными целыми q_j формулой $Q_j=\frac{1}{4}(3N+2)-q_j$. Подробный анализ показывает, что в основном состоянии последовательность чисел Q_j монотонно возрастает вместе с j в интервале $\left[-\frac{N}{4}+\frac{1}{2},\ \frac{N}{4}-\frac{1}{2}\right]$, т.е. $Q_{j+1}-Q_j=1$. При $N\to\infty$ можно заменить

$$\frac{Q_j}{N}\to x,\quad \lambda_j\to\lambda(x),\quad -\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{4}$$

где $\lambda(x)$ – монотонная непрерывная функция, причем $\lambda(\pm\frac{1}{4})=\pm\infty$. На нее в пределе получается интегральное уравнение

$$\mathrm{arctg}\,2\lambda(x)=\pi x+\int\limits_{-1/4}^{1/4}\mathrm{arctg}\,(\lambda(x)-\lambda(x'))dx' \tag{1.38}$$

Удобнее, однако, работать с функцией

$$\rho(\lambda)=\Big(\frac{d\lambda(x)}{dx}\Big)^{-1}\Big|_{x=x(\lambda)} \tag{1.39}$$

(здесь $x(\lambda)$ – функция, обратная к $\lambda(x)$), которая имеет смысл нормированной плотности чисел λ_j в интервале $[\lambda,\ \lambda+d\lambda]$. Это легко понять, написав

$$N\rho(\lambda)d\lambda=N(x(\lambda+d\lambda)-x(\lambda))=N\frac{dx}{d\lambda}d\lambda=Ndx$$

По определению функции $x(\lambda)$ справа стоит количество чисел Q_j на интервале $[x,x+dx]$. Поэтому левая часть равна количеству чисел λ_j в интервале $[\lambda,\ \lambda+d\lambda]$. Отсюда ясно, что функция $\rho(\lambda)$ должна удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{2} \tag{1.40}$$

Введение функции плотности позволяет в пределе $N\to\infty$ заменять суммы интегралами по правилу

$$\sum_j f(\lambda_j)=N\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda$$

Дифференцируя (1.38) по x, получим для $\rho(\lambda)$ интегральное уравнение

$$\pi\rho(\lambda) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\mu)\,d\mu}{(\lambda-\mu)^2+1} = \frac{2}{4\lambda^2+1} \tag{1.41}$$

Оно решается преобразованием Фурье. Чтобы перейти к Фурье-образам, проинтегрируем обе части с функцией $e^{i\lambda\xi}$ и учтем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda\xi}d\lambda}{\lambda^2+1} = \pi e^{-|\xi|}$$

Тогда на Фурье-образ $\hat{\rho}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi}\rho(\lambda)d\lambda$ получается алгебраическое уравнение, решение которого имеет вид $\hat{\rho}(\xi) = \dfrac{1}{2\cosh(\xi/2)}$, откуда

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda\xi}\,d\xi}{2\cosh(\xi/2)} = \frac{1}{2\cosh(\pi\lambda)} \tag{1.42}$$

Энергия и импульс основного состояния вычисляются по формулам

$$E_0 = -\sum_{k=1}^{N/2} \varepsilon(\lambda_j) = -N\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda$$

$$P_0 = \sum_{k=1}^{N/2} p(\lambda_j) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda$$

Упражнение. Вычислить эти интегралы и показать, что $E_0 = -2N\log 2$, $P_0 = \pi N/2 \pmod{2\pi}$.

1.1.5 Анизотропная спиновая цепочка: XXZ-модель

Гамильтониан анизотропной модели Гейзенберга (XXZ-модели) имеет вид

$$\boxed{H^{\mathrm{xxz}} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Big(\sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)} + \Delta(\sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - 1)\Big)} \tag{1.43}$$

где Δ называется параметром анизотропии. Диагонализация этого оператора методом Бете лишь немногим сложнее, чем в изотропном случае. В самом деле, написав

$$H^{\mathrm{xxz}} = H^{\mathrm{xxx}} - \frac{1}{2}(\Delta-1)\Big(\sum_{k=1}^{N}\sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - N\Big)$$

видим, что добавочная часть действует на базисные векторы диагонально и потому ее вклад легко учитывается.

Введем временное обозначение $\Big|k_1,k_2,\ldots,k_m\Big\rangle \equiv \sigma_+^{(k_1)}\sigma_+^{(k_2)}\ldots\sigma_+^{(k_m)}|\Omega\rangle$ (как обычно, при $1 \le k_1 \le \ldots \le k_m \le N$). Из очевидного равенства

$$\sigma_z^{(k)}\Big|k_1,k_2,\ldots,k_m\Big\rangle = \Big(1 - 2\sum_{\alpha=1}^{m}\delta_{k,k_\alpha}\Big)\Big|k_1,k_2,\ldots,k_m\Big\rangle$$

легко следует, что

$$\Big(\sum_{k=1}^{N}\sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)}-N\Big)\,\Big|\,k_1,k_2,\ldots,k_m\Big\rangle = 4\sum_{\alpha=1}^{m}\Big(\delta_{k_\alpha+1,k_{\alpha+1}}-1\Big)\,\Big|\,k_1,k_2,\ldots,k_m\Big\rangle$$

Этот добавочный вклад приведет к тому, что в выражении для ковектора

$$-\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)}\ldots\sigma_+^{(n_m)}H^{\mathrm{xxz}} = \langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)}\ldots\sigma_+^{(n_m)}\Big[\mathcal{P}-N+\frac{1}{2}(\Delta-1)\Big(\sum_{k=1}^{N}\sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)}-N\Big)\Big]$$

аналогичном (1.27) третья сумма в правой части войдет с коэффициентом 2Δ вместо 2. Следовательно, уравнение (1.28) и условия (1.30) примут соответственно вид

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{m}\Big(2\Delta-e^{\partial_{n_\alpha}}-e^{-\partial_{n_\alpha}}\Big)\,a(n_1,\ldots,n_m)+\sum_{\alpha=1}^{m}\delta_{n_\alpha+1,n_{\alpha+1}}\Big(2\Delta-e^{\partial_{n_\alpha}}-e^{-\partial_{n_\alpha}}\Big)\,a(n_1,\ldots,n_m)\\ = \;E\,a(n_1,\ldots,n_m)\end{aligned}\tag{1.44}$$

$$\begin{aligned}a(n_1,\ldots,n_\alpha,n_\alpha,\ldots,n_m)+a(n_1,\ldots,n_\alpha{+}1,n_\alpha{+}1,\ldots,n_m)\\ = \;2\Delta a(n_1,\ldots,n_\alpha,n_\alpha{+}1,\ldots,n_m)\end{aligned}\tag{1.45}$$

Общее решение первого уравнения, собственное для оператора сдвига, такое же, как и в изотропном случае:

$$a(n_1,\ldots,n_m)=\sum_{\sigma\in S_m}A_\sigma\exp\Big(i\sum_{j=1}^{m}p_{\sigma(j)}n_j\Big)$$

Полный импульс опять дается суммой параметров p_α, но выражение для энергии модифицируется:

$$P=\sum_{\alpha=1}^{m}p_\alpha\,,\qquad E=2\sum_{\alpha=1}^{m}(\Delta-\cos p_\alpha)$$

Условия (1.45) налагают на коэффициенты A_σ соотношения, которые удается однозначно разрешить с точностью до общего множителя.

Волновая функция Бете (при $1\le n_1<n_2<\ldots<n_N\le N$) имеет такой же общий вид (1.31), как и раньше:

$$a(n_1,n_2,\ldots,n_m)=\sum_{\sigma\in S_m}\exp\Big(i\sum_{j=1}^{m}p_{\sigma(j)}n_j+\frac{i}{2}\sum_{j<k}\theta_{\sigma(j)\sigma(k)}\Big)\tag{1.46}$$

но фазы $\theta_{jk}\equiv\theta(p_j,p_k)$ определяются теперь формулой

$$e^{i\theta(p_j,p_k)}=-\frac{1+e^{i(p_j+p_k)}-2\Delta e^{ip_j}}{1+e^{i(p_j+p_k)}-2\Delta e^{ip_k}}$$

Условие периодичности (1.33) приводит к тем же уравнениям Бете на параметры p_i в форме (1.34).

Существуют также аналоги λ-параметризации. Они различны в случаях $\Delta>1$ и $0<\Delta<1$.

Пусть сначала $\Delta > 1$. Параметр λ вводится формулой

$$e^{ip} = \frac{\sin\eta(\lambda + \frac{i}{2})}{\sin\eta(\lambda - \frac{i}{2})} \qquad \text{или} \qquad \operatorname{ctg}\frac{p}{2} = \coth(\eta/2)\operatorname{tg}(\eta\lambda) \tag{1.47}$$

где вещественный параметр η связан с Δ соотношением

$$\Delta = \cosh\eta \tag{1.48}$$

Для сдвига фазы имеем:

$$e^{i\theta_{12}} = \frac{\sin\eta(\lambda_1 - \lambda_2 + i)}{\sin\eta(\lambda_1 - \lambda_2 - i)} \tag{1.49}$$

Функции $p(\lambda)$ и $\varepsilon(\lambda)$ таковы (ср. с (1.21)):

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= -2\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}(\eta\lambda)}{\tanh(\eta/2)}\right) + \pi \\ \varepsilon(\lambda) &= \frac{2\sinh^2\eta}{\cosh\eta - \cos(2\eta\lambda)} \end{aligned} \tag{1.50}$$

Они переходят в (1.21) в пределе $\eta \to 0$. Уравнения Бете для XXZ-модели в λ-параметризации таковы:

$$\boxed{\left(\frac{\sin\eta(\lambda_j - \frac{i}{2})}{\sin\eta(\lambda_j + \frac{i}{2})}\right)^N = \prod_{k\neq j}\frac{\sin\eta(\lambda_j - \lambda_k - i)}{\sin\eta(\lambda_j - \lambda_k + i)}, \quad j = 1, \dots, m.} \tag{1.51}$$

Формулы для случая $|\Delta| < 1$ получаются из написанных выше заменой $\eta = i\gamma$, при этом $\Delta = \cos\gamma$.

Задача. Найти струнные решения уравнений Бете для XXZ-модели при $m = 2$ в пределе $N \to \infty$ и выразить импульс и энергию соответствующих состояний через вещественные части чисел λ_j.

1.2 Анзац Бете для одномерного бозе-газа с точечным взаимодействием

Цель этого раздела – показать, что анзац Бете так же хорошо работает и для непрерывных моделей.

Рассмотрим N квантовых частиц на прямой, которые взаимодействуют, только когда какие-то две из них оказываются в одной точке. Такое "точечное взаимодействие" математически описывается потенциалом в виде δ-функции. Гамильтониан в координатном представлении имеет вид

$$\hat{H}_N = -\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + 2c\sum_{1\le j<k\le N}\delta(x_j - x_k) \tag{1.52}$$

Мы положили $\hbar = 1$, масса частицы $= \frac{1}{2}$. При $c = 0$ имеем систему свободных (невзаимодействующих) частиц. При $c > 0$ частицы отталкиваются друг от друга (им энергетически невыгодно находиться в одной точке), при $c < 0$ притягиваются. Ниже мы будем рассматривать случай отталкивания $c > 0$.

По правилам квантовой механики оператор импульса такой системы частиц:

$$\hat{P}_N = -i \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{1.53}$$

Он коммутирует с гамильтонианом, поскольку взаимодействие зависит только от разностей координат. То есть полный импульс сохраняется. Стационарное уравнение Шредингера для волновой функции Ψ имеет вид

$$\hat{H}_N \Psi(x_1, \ldots, x_N) = E\Psi(x_1, \ldots, x_N) \tag{1.54}$$

Его-то мы и хотим решить. А точнее, мы хотим, как и в случае XXX-модели, найти общие собственные функции гамильтониана и оператора полного импульса, а также, в первую очередь, собственные значения энергии на таких состояниях (спектр).

1.2.1 Волновая функция Бете

Начнем опять с тривиального случая одной частицы. Имеем:

$$\Psi(x_1) = e^{ip_1 x_1}\,, \qquad E = p_1^2$$

Если наложить периодические граничные условия $\Psi(x_1 + L) = \Psi(x_1)$, импульс p_1 будет квантоваться: $p_1 = 2\pi\ell/L$, $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Поскольку частица одна, взаимодействие никак не проявляется.

Для двух частиц задача становится интереснее:

$$-(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)\Psi(x_1, x_2) + 2c\delta(x_1 - x_2)\Psi(x_1, x_2) = E\Psi(x_1, x_2)$$

При $x_1 = x_2$ имеется особенность. Волновая функция при этом непрерывная, но ее производные испытывают скачок. При $x_1 \neq x_2$ взаимодействия нет, и частицы ведут себя как свободные, т.е волновую функцию при, например, $x_1 \leq x_2$ можно искать в виде

$$\Psi(x_1, x_2) = A_{12} e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2)} + A_{21} e^{i(p_1 x_2 + p_2 x_1)}$$

Дельта-функционный потенциал эквивалентен наложению определенного граничного условия на эту функцию при $x_1 = x_2 - 0$. Несложные аргументы показывают, что условие это таково:

$$(\partial_{x_2} - \partial_{x_1} - c)\, \Psi\Big|_{x_1 = x_2 - 0} = 0 \tag{1.55}$$

откуда находим

$$\frac{A_{21}}{A_{12}} = \frac{p_1 - p_2 - ic}{p_1 - p_2 + ic} \tag{1.56}$$

Чтобы вывести данное условие, перейдем к координатам $x = x_2 - x_1$, $X = \frac{1}{2}(x_2 + x_1)$, тогда $\partial_{x_2} - \partial_{x_1} = 2\partial_x$, $\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 = 2\partial_x^2 + \frac{1}{2}\partial_X^2$, и уравнение Шредингера запишется в виде

$$-2\partial_x^2 \Psi + 2c\delta(x)\Psi = (E + \frac{1}{2}\,\partial_X^2)\Psi$$

В правой части собраны члены, которые остаются конечными при $x = 0$. Левая часть тоже должна быть конечной, а это значит, что особенность δ-функционного члена должна компенсироваться разрывом первой производной Ψ в точке $x = 0$. Иными словами, проинтегрируем обе части уравнения по x по малому интервалу $[0, \varepsilon]$ и устремим $\varepsilon \to 0$:

$$\int_0^\varepsilon (-2\partial_x^2 \Psi + 2c\delta(x)\Psi) dx = 0$$

В правой части мы написали 0, поскольку в пределе $\varepsilon \to 0$ все члены в правой части исчезают. Имеем, следовательно, соотношение

$$-2\partial_x \Psi \Big|_0^\varepsilon + 2c \int_0^\varepsilon \delta(x)\Psi dx = 0$$

Возникает вопрос, как понимать интеграл от δ-функции по отрезку, левым концом которого является носитель δ-функции – точка $x = 0$. В большинстве изложений метода Бете для этой модели интегрирование здесь проводится по отрезку $|x| \le \varepsilon$, что, с одной стороны, снимает эту проблему, а с другой требует продолжения волновой функции в область $x_1 > x_2$, в которой она изначально не была определена. (Между тем, исходная задача по сути не предполагает такого доопределения.) Конечно, всегда предполагается симметричное продолжение, и это правильно, но нам кажется важным, что есть возможность провести все рассуждения, оставаясь в секторе $x_1 \le x_2$. А если так, то интеграл, одним из пределов которого является носитель δ-функции, надо понимать как *половину* такого интеграла по отрезку, содержащего носитель внутри, поскольку работать будет только половина δ-функции. Аналогично, $\partial_x \Psi(0)$ надо понимать как 0 в силу симметрии. Поэтому наше условие говорит, что

$$\lim_{x \to +0} \partial_x \Psi(x) = c\Psi(0)$$

что совпадает с (1.55).

Более формальный способ действий заключается в том, чтобы искать решение во всей области изменения координат x_1, x_2, но при этом сразу наложить условие симметрии волновой функции $\Psi(x_1, x_2) = \Psi(x_2, x_1)$. А именно, будем искать решение в виде

$$\Psi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)\theta(x_2 - x_1) + f(x_2, x_1)\theta(x_1 - x_2)$$

где $\theta(x)$ – ступенчатая функция Хэвисайда ($\theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$), а

$$f(x_1, x_2) = A_{12} e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2)} + A_{21} e^{i(p_1 x_2 + p_2 x_1)}$$

Заметим, что если доопределить функцию Хэвисайда условием $\theta(0) = \frac{1}{2}$, функция Ψ будет непрерывна при $x_1 = x_2$. Т.к. $\partial_x \theta(x) = \delta(x)$, имеем в результате прямого вычисления:

$$\begin{aligned} -\partial_{x_1}^2 \Psi(x_1, x_2) \;\; = \;\; & -\partial_{x_1}^2 f(x_1, x_2)\theta(x_2 - x_1) - \partial_{x_1}^2 f(x_2, x_1)\theta(x_1 - x_2) \\ & + 2\partial_{x_1} f(x_1, x_2)\delta(x_2 - x_1) - 2\partial_{x_1} f(x_2, x_1)\delta(x_1 - x_1) \\ & + f(x_1, x_2)\delta'(x_1 - x_2) - f(x_2, x_1)\delta'(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

и аналогично для $\partial_{x_2}^2\Psi(x_1,x_2)$. Учитывая, что $g(x)\delta'(x) = -g'(x)\,\delta(x)$ для любой непрерывной антисимметричной функции g (эту формулу следует понимать как равенство интегралов от левой и правой частей с любой гладкой функцией), получаем:

$$\hat{H}_N\Psi = (p_1^2+p_2^2)\Psi + 2\delta(x_1-x_2)\Big(c(A_{12}+A_{21}) + i(A_{12}-A_{21})(p_1-p_2)\Big)e^{i(p_1+p_2)x_1}$$

Потребовав зануления последнего члена, приходим к тому же соотношению (1.56).

В случае N частиц волновую функцию в секторе $0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_N \le L$ пишем в виде

$$\Psi = \sum_{\sigma\in S_N} A_\sigma \exp\Big(i\sum_{j=1}^N p_{\sigma(j)}x_j\Big) \tag{1.57}$$

с граничными условиями

$$\Big(\partial_{x_{j+1}} - \partial_{x_j} - c\Big)\Psi\Big|_{x_j=x_{j+1}-0} = 0, \qquad j=1,2,\ldots,N-1.$$

Данные условия получаются совершенно аналогично случаю двух частиц. А именно, рассмотрим волновую функцию как функцию от x_j и x_{j+1} при $x_j \to x_{j+1}-0$, вместо x_j, x_{j+1} введем координаты $x = x_{j+1}-x_j$ и $X = \frac{1}{2}(x_{j+1}+x_j)$ и проинтегрируем уравнение Шредингера по x от 0 до ε при $\varepsilon \to 0$.

Теорема. Точная волновая функция N-частичного гамильтонана (1.52) в секторе $0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_N \le L$ имеет вид

$$\Psi = C\prod_{m<n}\Big(i\partial_{x_m} - i\partial_{x_n} - ic\Big)\det_{1\le j,k\le N}\Big(e^{ip_jx_k}\Big) \tag{1.58}$$

Для доказательства нужно проверить, что она представляется в виде (1.57), и что выполняются граничные условия. Первое очевидно из разложения детерминанта,

$$\Psi = C\sum_{\sigma\in S_N}(-1)^{[\sigma]}\prod_{m<n}(p_{\sigma(m)} - p_{\sigma(n)} - ic)\,\exp\Big(i\sum_{j=1}^N p_{\sigma(j)}x_j\Big) \tag{1.59}$$

а второе удобнее проверять в форме (1.58), не раскладывая детерминант. Проверим, например, условие $(\partial_{x_2} - \partial_{x_1} - c)\Psi\Big|_{x_1=x_2-0} = 0$. Для этого заметим, что $\Psi = -i(\partial_{x_2} - \partial_{x_1} + c)\tilde{\Psi}$, где

$$\tilde{\Psi} = C\prod_{j=3}^N\Big(i\partial_{x_1} - i\partial_{x_j} - ic\Big)\Big(i\partial_{x_2} - i\partial_{x_j} - ic\Big)\times\prod_{3\le m<n\le N}\Big(i\partial_{x_m} - i\partial_{x_n} - ic\Big)\det_{1\le j,k\le N}\Big(e^{ip_jx_k}\Big)$$

Функция $\tilde{\Psi}$, очевидно, антисиммметрична относительно перестановки $x_1 \leftrightarrow x_2$. Переписав левую часть интересующего нас условия $(\partial_{x_2} - \partial_{x_1} - c)\Psi\Big|_{x_1=x_2-0} = 0$ в виде $-i\left((\partial_{x_2}-\partial_{x_1})^2 - c^2\right)\tilde{\Psi}$, видим, что она антисимметрична относительно перестановки $x_1 \leftrightarrow x_2$, и, следовательно, равна 0.

Следствие. Точная волновая функция N-частичного гамильтонана (1.52) симметризованная по всем частицам, имеет вид

$$\Psi^{\mathrm{symm}} = C\sum_{\sigma\in S_N}(-1)^{[\sigma]}\prod_{m<n}\Big(p_{\sigma(m)} - p_{\sigma(n)} + ic\,\mathrm{sign}\,(x_m - x_n)\Big)\,\exp\Big(i\sum_{j=1}^N p_{\sigma(j)}x_j\Big). \tag{1.60}$$

Если надо указать зависимость волновой функции от координат и параметров, будем писать $\Psi^{\rm symm} = \Psi^{\rm symm}(\{x_i\}|\{p_i\})$.

Нормировочную константу C (она зависит от N и всех параметров p_i) можно определить из условия нормировки

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx_1 \ldots dx_N \Psi^{\rm symm}(\{x_i\}|\{p_i\})\Psi^{\rm symm}(\{x_i\}|\{p'_i\}) = (2\pi)^N \prod_{j=1}^{N} \delta(p_i - p'_i) \qquad (1.61)$$

При этом предполагается, что параметры p_i, p'_i лежат в области $p_1 < p_2 < \ldots < p_N$, $p'_1 < p'_2 < \ldots < p'_N$. Выполняется также соотношение полноты

$$\int_{\mathbb{R}^N} dp_1 \ldots dp_N \Psi^{\rm symm}(\{x_i\}|\{p_i\})\Psi^{\rm symm}(\{x'_i\}|\{p_i\}) = (2\pi)^N \prod_{j=1}^{N} \delta(x_i - x'_i) \qquad (1.62)$$

При этом предполагается, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$, $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_N$.

Задача. Найти нормировочную константу C и проверить условие полноты для $N = 1$ и $N = 2$.

Предельный случай $c \to \infty$ соответствует системе непроницаемых бозе-частиц. В этом случае волновая функция Ψ в секторе $x_1 < \ldots < x_N$ совпадает с таковой для N свободных фермионов, т.е. $\det_{jk}(e^{ip_j x_k})$ ("слэтеровский детерминант"), а $\Psi^{\rm symm} \propto \det_{jk} e^{ip_j x_k} \prod_{j<k} {\rm sign}\,(x_j - x_k)$.

Итак, точные собственные функции N-частичного гамильтонана (1.52) (волновые функции Бете) имеют вид (1.59), (1.58) или в симметризованном варианте (1.60). Они параметризуются N числами $p_1, \ldots, p_N$. Собственные значения импульса и энергии для них:

$$P = \sum_{j=1}^{N} p_j\,, \qquad E = \sum_{j=1}^{N} p_j^2. \qquad (1.63)$$

Отметим, что из представления (1.58) очевидно, что волновая функция тождественно зануляется если найдется такая пара индексов $j \neq k$, для которых $p_j = p_k$ (принцип Паули для одномерных бозонов).

1.2.2 Уравнения Бете

Наложение периодических граничных условий (т.е. помещение частиц на отрезок длины L с отождествленными концами) ведет к уравнениям на возможные значения параметров p_j.

Кажется очевидным, что надо потребовать периодичности функции $\Psi^{\rm symm}$ по каждому аргументу, т.е. $\Psi^{\rm symm}(x_1, \ldots, x_j + L, \ldots, x_N) = \Psi^{\rm symm}(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_N)$ для всех j, как это часто делают в обзорах и лекционных курсах. Однако, это *неверно*! Пример $N = 2$ показывает, что условия $\Psi^{\rm symm}(x_1 + L, x_2) = \Psi^{\rm symm}(x_1, x_2)$ и $\Psi^{\rm symm}(x_1, x_2 + L) = \Psi^{\rm symm}(x_1, x_2)$, вообще говоря, противоречивы (!). Первое дает уравнения Бете $e^{ip_1 L} = A_{12}/A_{21}$, $e^{ip_2 L} = A_{21}/A_{12}$, а второе – условия квантования импульсов свободных частиц в ящике $e^{ip_1 L} = e^{ip_2 L} = 1$. Казалось бы, это противоречит симметрии волновой функции. В действительности симметрия не нарушается, поскольку правильный способ действий состоит в том, чтобы условие

$\Psi^{\mathrm{symm}}(x_1+L,x_2)=\Psi^{\mathrm{symm}}(x_1,x_2)$ накладывать при $x_1<x_2$, а условие $\Psi^{\mathrm{symm}}(x_1,x_2+L)=\Psi^{\mathrm{symm}}(x_1,x_2)$ – при $x_1>x_2$, но все равно это выглядит несколько странно.

Задача. Попробовать самостоятельно разобраться с тем, что здесь происходит.

Объяснение всех этих "странностей" в том, что прежде чем накладывать периодические граничные условия, необходимо модифицировать потенциал взаимодействия в уравнении Шредингера, сделав его L-периодическим, т.е. вместо $\delta(x)$ написать $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta(x+kL)$. Иначе возникнет несогласованность, которая и проявилась в приведенном выше примере. Поэтому возможны два способа действий, которые не следует смешивать. Первый – модифицировать волновую функцию (1.60) так, чтобы она решала уравнение Шредингера с периодическим δ-образным потенциалом, а уже потом требовать ее периодичности. Второй – оставить решение как есть, но ограничиться в рассмотрении конфигурациями, в которых разность координат любой пары частиц по модулю не превышает L (тогда работает только одна δ-функция, и решение модифицировать не надо). Можно, например, ограничиться сектором $a<x_1<x_2<\ldots<x_N<L+a$ с любым a.

Рассуждения, близкие к тем, которые были использованы при выводе условия периодичности в XXX-модели, приводят к условию

$$\boxed{\begin{gathered}\Psi(x_1,x_2,\ldots,x_N)=\Psi(x_2,x_3,\ldots x_N,x_1+L)\\[1ex] \text{в секторе}\quad 0<x_1<x_2<\ldots<x_N<L\end{gathered}} \tag{1.64}$$

Оно эквивалентно системе уравнений Бете на параметры p_j:

$$e^{ip_jL}=\prod_{k\neq j}\frac{p_j-p_k+ic}{p_j-p_k-ic}\,,\qquad j=1,\ldots,N \tag{1.65}$$

Можно показать, что в отличие от XXX-модели, все их решения при $c>0$ вещественны.

Задача. Дать подробный вывод условия периодичности для $N=2$ и $N=3$ первым и вторым из указанных выше способов, а потом вывести из него уравнения Бете.

Отметим, что после замены $p_j=\lambda_j$ правые части уравнений Бете для XXX-модели и бозе-газа совпадают. На самом деле это общая закономерность – возможный вид правых частей уравнений Бете диктуется общими интегрируемыми структурами (которые пока остаются за кадром), и позволяет разделить квантовые интегрируемые модели на небольшое число классов, а левые части могут выражаться через произвольную функцию от λ, которая задает конкретную модель внутри класса. Так, мы видим, что XXX-магнетик и бозе-газ относятся к одному классу, а XXZ-магнетик – к другому. Уместна аналогия с теорией представлений – правые части уравнений Бете аналогичны структурным константам алгебры, а левые – выбору ее представления.

Имея в виду это замечание, будем писать уравнения Бете для бозе-газа в терминах λ:

$$\boxed{e^{i\lambda_jL}=\prod_{k\neq j}\frac{\lambda_j-\lambda_k+ic}{\lambda_j-\lambda_k-ic}\,,\qquad j=1,\ldots,N} \tag{1.66}$$

Модель бозе-газа характеризуется тем, что в ней параметр λ наиболее просто связан с импульсом частицы.

Для анализа этой системы уравнений полезно их прологарифмировать:

$$L\lambda_j + \sum_{k\neq j} \tilde{\Phi}(\lambda_j - \lambda_k) = 2\pi \tilde{n}_j \tag{1.67}$$

Здесь $\tilde{\Phi}(\lambda) = i \log \dfrac{\lambda + ic}{\lambda - ic}$, а $\tilde{n}_j$ – какие-то целые числа. Вместо $\tilde{\Phi}(\lambda)$ удобно ввести антисимметричную функцию

$$\Phi(\lambda) = \tilde{\Phi}(\lambda) + \pi = 2\mathrm{arctg}\Big(\lambda/c\Big) \tag{1.68}$$

и переопределить числа $\tilde{n}_j$, введя $n_j = \tilde{n}_j + \frac{1}{2}\,(N-1)$ (при четных N эти числа будут полуцелыми). Тогда наши уравнения примут вид

$$L\lambda_j + \sum_{k} \Phi(\lambda_j - \lambda_k) = 2\pi n_j \tag{1.69}$$

(отметим, что поскольку $\Phi(0) = 0$, в сумме можно снять ограничение $k \neq j$). Их мы тоже будем называть уравнениями Бете. Запись в форме (1.69) предпочтительнее, поскольку можно доказать (см. ниже), что решения этой системы, такие, что $\lambda_j \neq \lambda_k$ при $j \neq k$, существуют и единственным образом определяются наборами целых или полуцелых чисел n_j, среди которых нет совпадающих.

Лемма. Если $n_j > n_k$, то $\lambda_j > \lambda_k$; если $n_j = n_k$, то $\lambda_j = \lambda_k$.

Для доказательства рассмотрим разность двух уравнений системы:

$$L(\lambda_j - \lambda_k) + 2\sum_{l=1}^{N}\Big(\mathrm{arctg}\,((\lambda_j - \lambda_l)/c) - \mathrm{arctg}\,((\lambda_k - \lambda_l)/c)\Big) = 2\pi(n_j - n_k)$$

Поскольку arctg – монотонно возрастающая функция, левая часть положительна если и только если $\lambda_j > \lambda_k$ и равна 0 если и только если $\lambda_j = \lambda_k$. Поэтому при $n_j > n_k$ должно быть $\lambda_j > \lambda_k$, а при $n_j = n_k$ должно быть $\lambda_j = \lambda_k$.

Лемма. Функционал энергии $E = \sum \lambda_j^2$ в модели с N частицами минимизируется на состоянии со следующим набором чисел n_j:

$$n_j = -\frac{N+1}{2} + j\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.70}$$

Иными словами, в основном состоянии числа n_j заполняют интервал от $-\frac{1}{2}\,(N-1)$ до $+\frac{1}{2}\,(N-1)$, следуя через 1 без пропусков. Это более-менее понятно из соображений симметрии, но в литературе можно найти и строгое доказательство.

Задача. Показать, что в состоянии, которое характеризуется числами n_j, полный импульс равен $P = \dfrac{2\pi}{L}\sum_j n_j$.

1.2.3 Действие Янга

Нетрудно проверить, что уравнения Бете для модели бозе-газа получаются как условия экстремума функции N переменных λ_j

$$\mathcal{Y} = \frac{L}{2}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2 - 2\pi\sum_{j=1}^{N} n_j\lambda_j + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N}\Phi_1(\lambda_j-\lambda_k) \tag{1.71}$$

где

$$\Phi_1(\lambda) = \int_0^\lambda \Phi(\mu)d\mu = 2\lambda\,\mathrm{arctg}\,(\lambda/c) - c\log\Big(1+\frac{\lambda^2}{c^2}\Big) \quad -$$

первообразная функции $\Phi(\lambda)$. Функция $\mathcal{Y}$ называется действием Янга (или Янга-Янга) и играет важную роль. На самом деле возможность сформулировать уравнения Бете в виде вариационного принципа является общим фактом и имеет место также и для других моделей. Случай бозе-газа с отталкиванием выделен тем, что для него функция Янга обладает особенно хорошими свойствами, позволяющими строго доказать такое, например, утверждение.

Теорема. Решения системы (1.69) существуют и единственным образом определяются наборами целых или полуцелых чисел n_j.

Уравнения Бете (1.69) получаются как условия экстремума функции Янга,

$$\frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial\lambda_j} = 0\,.$$

Утверждение теоремы следует из того, что функция Янга выпукла, а потому этот экстремум является минимумом, и он единствен. Для доказательства выпуклости функции Янга достаточно проверить, что матрица вторых производных (гессиан) $\mathcal{Y}_{jk} = \partial^2\mathcal{Y}/\partial\lambda_j\partial\lambda_k$ является положительно определенной, т.е. все ее собственные значения положительны. Эта матрица имеет вид

$$\mathcal{Y}_{jk} = \delta_{jk}\Big(L + \sum_{l=1}^{N} K(\lambda_j-\lambda_l)\Big) - K(\lambda_j-\lambda_k)$$

где

$$K(\lambda-\mu) = \Phi'(\lambda-\mu) = \frac{2c}{(\lambda-\mu)^2+c^2}\,. \tag{1.72}$$

Для любого вещественного вектора v_j имеем:

$$\sum_{jk}\mathcal{Y}_{jk}v_jv_k = L\sum_j v_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{k\neq j}K(\lambda_j-\lambda_k)(v_j-v_k)^2 > 0$$

(здесь важно, что $c > 0$). Это означает, что матрица $\mathcal{Y}_{jk}$ положительно определена при всех λ_j, функция $\mathcal{Y}$ выпукла и имеет единственный минимум.

Для моделей XXX и XXZ выпуклость функции Янга не имеет места, и поэтому строгие доказательства аналогичных утверждений затруднены.

Важность матрицы $\mathcal{Y}_{jk}$ заключается также в том, что ее детерминант равен квадрату нормы бетевского состояния системы в конечном объеме.

Задача. Написать функцию Янга для XXX-модели.

1.2.4 Решение уравнений Бете в термодинамическом пределе

Под термодинамическим пределом мы понимаем предел $N \to \infty$, $L \to \infty$, причем величина $\rho_0 = N/L$, которая имеет смысл средней плотности частиц в конфигурационном пространстве, остается конечной.

Основное состояние. Сначала исследуем основное состояние (вакуум). Согласно приведенной выше лемме, числа n_j надо выбирать как в (1.70). Полный импульс равен 0. Числа n_j и λ_j располагаются без пропусков симметрично относительно 0, образуя аналог моря Дирака. В пределе числа λ_j располагаются на некотором интервале $(-\Lambda, \Lambda)$ все теснее друг к другу. Введем плотность их распределения формулой

$$\rho(\lambda_j) = \lim_{N,L\to\infty} \frac{1}{L(\lambda_{j+1} - \lambda_j)} \tag{1.73}$$

Эта функция позволяет заменять суммы на интегралы по правилу

$$\sum_j f(\lambda_j) = L \int_{-\Lambda}^{\Lambda} f(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda$$

Возьмем два соседних уравнения (1.69) (для $j+1$ и j) и вычтем их друг из друга:

$$L(\lambda_{j+1} - \lambda_j) + \sum_k \left[\Phi(\lambda_{j+1} - \lambda_k) - \Phi(\lambda_j - \lambda_k)\right] = 2\pi$$

Считая разность $\lambda_{j+1} - \lambda_j$ малой, разложим выражение под знаком суммы в ряд Тейлора и оставим первый член. Разделив после этого обе части на $L(\lambda_{j+1} - \lambda_j)$, будем иметь:

$$1 + \frac{1}{L}\sum_k \Phi'(\lambda_j - \lambda_k) = \frac{2\pi}{L(\lambda_{j+1} - \lambda_j)} \tag{1.74}$$

Заменяя сумму на интеграл и вспоминая определения плотности (1.73) и функции $K(\lambda - \mu)$ (1.72), окончательно получим интегральное уравнение на функцию распределения плотности:

$$2\pi\rho(\lambda) - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \mu)\rho(\mu)d\mu = 1 \tag{1.75}$$

В отличие от XXX-модели, решение этого уравнение не выражается через известные функции (из-за конечности пределов), но может быть эффективно найдено численно, и, кроме того, можно доказать ряд строгих утверждений о существовании решения и его основных свойствах. Мы не будем на этом останавливаться.

Величина Λ (импульс Ферми) определяется из условия нормировки

$$\rho_0 = \frac{N}{L} = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \rho(\lambda)d\lambda \tag{1.76}$$

Энергия основного состояния дается формулой

$$E_0 = L\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \lambda^2 \rho(\lambda)d\lambda \tag{1.77}$$

Элементарные возбуждения. Покажем на простейшем примере, как техника анзаца Бете позволяет строить возбужденные состояния (собственные состояния гамильтониана с энергией $E > E_0$). В физике основной интерес представляют низколежащие возбуждения, т.е. такие, что $E - E_0$ остается конечной при $L \to \infty$. Они интерпретируются как физически наблюдаемые "одетые" частицы и их состояния рассеяния, в отличие от "голых" частиц, в терминах которых был написан исходный гамильтониан.

Мы ограничимся состояниями, в которых число частиц не меняется. Простейшие возбуждения соответствуют выбору последовательности целых или полуцелых чисел n_j в следующем виде:

$$\{n_j\} = \Big\{-\frac{N-1}{2}, -\frac{N-3}{2}, \ldots, \frac{N-1}{2} - m^h - 1, \frac{N-1}{2} - m^h + 1, \ldots, \frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2} + m^p\Big\}$$

Здесь m^h и m^p – целые положительные числа. Это можно интерпретировать как рождение "частицы" в месте m^p и "дырки" в месте m^h (последнее означает изъятие числа $\frac{N-1}{2} - m^h$ из последовательности). Будем считать, что $m^h < \frac{N-1}{2}$, так что изъятие происходит в правой половине последовательности. Соответственно, можно ввести импульс добавленной частицы λ^p как параметр Бете, отвечающий добавленному числу $\frac{N-1}{2} + m^p$ и импульс дырки λ^h как параметр Бете, отвечавший изъятому числу $\frac{N-1}{2} - m^h$ в вакуумном решении.

При этом важно заметить, что полный импульс возбужденного состояния *не равен* $\lambda^p - \lambda^h$ (а равен $P = \frac{2\pi}{L}(m^p + m^h)$), поскольку в новом решении уравнений Бете значения всех остальных параметров λ_j немного подвинулись по сравнению с их вакуумными значениями. А так как их много ($O(N)$), суммарный вклад таких изменений может быть $O(1)$, т.е. того же порядка, что и $\lambda^p - \lambda^h$. Физики говорят, что $\lambda^p - \lambda^h$ – "голый" импульс возбуждения, а $\frac{2\pi}{L}(m^p + m^h)$ – наблюдаемый или "одетый" импульс, обусловленный взаимодействием. Отметим, что при $c = \infty$ они совпадают.

Чтобы найти реакцию "моря Дирака" на создание частицы и дырки, воспользуемся уже проверенным приемом – вычтем друг из друга уравнения Бете для возбужденного и вакуумного состояний и разложим по малым $\delta\lambda_j = \tilde{\lambda}_j - \lambda_j = O(1/L)$. Здесь λ_j – значение j-го корня Бете для основного состояния, а $\tilde{\lambda}_j$ – для возбужденного. Мы получим, для $1 \le j \le N - m^h - 1$:

$$(\tilde{\lambda}_j - \lambda_j)L + \sum_k \Big[\Phi(\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_k) - \Phi(\lambda_j - \lambda_k)\Big] = \Phi(\tilde{\lambda}_j - \lambda^h) - \Phi(\tilde{\lambda}_j - \lambda^p)$$

что после разложения до первого члена по $\delta\lambda_j = \tilde{\lambda}_j - \lambda_j$ примет вид

$$\delta\lambda_j L + \delta\lambda_j \sum_k \Phi'(\lambda_j - \lambda_k) - \sum_k \Phi'(\lambda_j - \lambda_k)\delta\lambda_k = \Phi(\tilde{\lambda}_j - \lambda^h) - \Phi(\tilde{\lambda}_j - \lambda^p)$$

Первые два члена в левой части можно преобразовать, воспользовавшись (1.74):

$$2\pi \frac{\tilde{\lambda}_j - \lambda_j}{\lambda_{j+1} - \lambda_j} - \frac{1}{L}\sum_k K(\lambda_j - \lambda_k)\frac{\tilde{\lambda}_k - \lambda_k}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} L(\lambda_{k+1} - \lambda_k) = \Phi(\tilde{\lambda}_j - \lambda^h) - \Phi(\tilde{\lambda}_j - \lambda^p)$$

Введя *функцию сдвига*

$$F(\lambda_j|\lambda^h, \lambda^p) = \lim_{N,L\to\infty} \frac{\tilde{\lambda}_j - \lambda_j}{\lambda_{j+1} - \lambda_j} = \lim_{N,L\to\infty} \Big(L\delta\lambda_j \rho(\lambda_j)\Big)$$

запишем то, что получилось, в виде интегрального уравнения

$$2\pi F(\lambda|\lambda^h,\lambda^p) - \int_{-\lambda}^{\Lambda} K(\lambda-\mu)F(\mu|\lambda^h,\lambda^p)d\mu = \Phi(\lambda-\lambda^h) - \Phi(\lambda-\lambda^p) \tag{1.78}$$

Энергия данного состояния выразится в виде

$$\begin{aligned} E - E_0 &= (\lambda^p)^2 - (\lambda^h)^2 + \sum_j (\tilde{\lambda}_j^2 - \lambda_j^2) \\ &= (\lambda^p)^2 - (\lambda^h)^2 + 2\sum_j \lambda_j \delta\lambda_j \\ &= (\lambda^p)^2 - (\lambda^h)^2 + 2\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \lambda F(\lambda|\lambda^h,\lambda^p)d\lambda \end{aligned} \tag{1.79}$$

Импульс же равен

$$\begin{aligned} P = \frac{2\pi}{L}(m^h + m^p) &= \lambda^p - \lambda^h + \sum_j (\tilde{\lambda}_j - \lambda_j) \\ &= \lambda^p - \lambda^h + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} F(\lambda|\lambda^h,\lambda^p)d\lambda \end{aligned} \tag{1.80}$$

Список литературы

[1] Н.М. Боголюбов, А.Г. Изергин, В.Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи*, Москва, “Наука”, 1992.

[2] М. Годен, *Волновая функция Бете*, Москва, “Мир”, 1987.

[3] Р.Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, М., Мир, 1985.

[4] Л. Тахтаджян, Л. Фаддеев, *Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга*, УМН **34:5** (1979) 13-63.

[5] Л. Тахтаджян, Л. Фаддеев, *Спектр и рассеяние возбуждений в одномерном изотропном магнетике Гейзенберга*, Записки научных семинаров ЛОМИ, **109** (1981) 134-178.

[6] F. Franchini, *Notes on Bethe ansatz techniques*, http://people.sissa.it/ ffranchi/BAnotes.pdf

[7] M. Zvonarev, *Notes on Bethe ansatz*, http://cmt.harvard.edu/demler/TEACHING/Physics284/LectureZvonarev.pdf