Анзац Бете в квантовых интегрируемых системах

Содержание

Вводные замечания

1 Координатный анзац Бете

1.1 Анзац Бете в модели Гейзенберга

1.1.1 Обозначения и терминология

1.1.2 Изотропный магнетик Гейзенберга (XXX-модель)

1.1.3 Построение собственных векторов в XXX-модели

1.1.4 Основное состояние антиферромагнитной цепочки

1.1.5 Анизотропная спиновая цепочка: XXZ-модель

1.2 Анзац Бете для одномерного бозе-газа с точечным взаимодействием

1.2.1 Волновая функция Бете

1.2.2 Уравнения Бете

1.2.3 Действие Янга

1.2.4 Решение уравнений Бете в термодинамическом пределе

2 Модели статистической механики на двумерной решетке (вершинные модели)

Этот раздел служит переходным этапом от изучения конкретных моделей к анализу общих алгебраических структур, лежащих в основе квантовой интегрируемости. Здесь рассматривается 6-вершинная модель на квадратной решетке – модель совершенно другого типа (и даже из другой области физики), точное решение которой, однако, оказывается возможным с помощью некоторой модификации того же метода Бете. Вместе с тем 6-вершинная модель оказывается тесно связанной с XXZ-цепочкой и позволяет построить коммутирующие интегралы движения для последней, т.е. операторы, коммутирующие с гамильтонианом и друг с другом. В контексте 6-вершинной модели можно наиболее наглядно ввести общие понятия квантового метода обратной задачи (трансфер-матрица R-матрица и др.) и развить алгебраический вариант метода Бете, применимый к широкому кругу квантовых интегрируемых систем.

2.1 Общая вершинная модель на квадратной решетке

Рассмотрим решетку размера $N \times M$ с квадратными ячейками, свернутую в тор, т.е. плоскую решетку с $M+1$ строками и $N+1$ столбцами, у которой крайние строки и столбцы отождествлены. Пусть на каждом горизонтальном ребре нарисована стрелка, ориентированная влево или вправо, а на каждом вертикальном – вверх или вниз. Поскольку в каждом узле решетки сходятся 4 ребра, имеем 16 возможных комбинаций стрелок на них (типов вершин). Припишем каждой возможной комбинации $j = 1, \ldots, 16$ число ε_j (энергию данной локальной конфигурации). Полная энергия, отвечающая некоторой расстановке стрелок на всех ребрах, находится тогда как сумма локальных энергий по всем узлам:

$$E = \sum_{j=1}^{16} N_j \varepsilon_j$$

где N_j – число узлов с комбинацией стрелок типа j в данной конфигурации. Полезно также ввести величины $w_j = e^{-\varepsilon_j/T}$, которые называются локальными больцмановскмими весами (они считаются одинаковыми для всех узлов). Статсумма равна

$$Z = \sum e^{-E/T} = \sum \prod_j w_j^{N_j}$$

где суммирование производится по всем конфигурациям стрелок на решетке, а E – полная энергия конфигурациии. Обычно интерес представляет вычисление свободной энергии на один узел в термодинамическом пределе как функции локальных больцмановских весов:

$$f = -T \lim_{M,N\to\infty} \frac{\log Z}{MN}$$

По понятной причине данная модель называется 16-вершинной. В общем случае она не имеет точного решения.

Отметим, что больцмановские веса некоторых локальных конфигураций могут быть равны 0 (при этом энергия равна $+\infty$). Это значит, что данные локальные конфигурации в вершине считаются запрещенными. Тогда число разрешенных типов вершин уменьшается. Таким образом получаются 8-вершинная и 6-вершинная модели, которые уже могут быть решены точно, по крайней мере в термодинамическом пределе (см. далее).

Вместо стрелок можно использовать спиновые переменные $\sigma = \pm 1$, живущие *на ребрах* решетки: если стрелка направлена вправо или вверх, $\sigma = +1$, а если влево или вниз, $\sigma = -1$. Каждой конфигурации стрелок в узле соответствуют 4 величины $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, принимающие значения ± 1. Переменные α, α' живут на вертикальных ребрах, а β, β' – на горизонтальных (рис. 1). Локальный больцмановский вес, отвечающий такой конфигурации, будем обозначать

$$R_\alpha^{\alpha'}(\beta, \beta') \qquad \text{или} \qquad R_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}$$

Рассмотрим какой-либо горизонтальный ряд решетки и прилегающие к нему снизу и сверху вертикальные ребра. Пусть $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N\}$ – переменные на вертикальных ребрах нижнего ряда, а $\{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_N\}$ – верхнего (рис. 2). Будем пока считать их фиксированными и найдем статсумму такого горизонтального "слоя" решетки, которую обозначим через

$$T^{\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_N}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N} \quad \text{или для краткости} \quad T^{\{\alpha'\}}_{\{\alpha\}}$$

Для этого надо взять произведение локальных больцмановских весов и просуммировать по всем состояниям на горизонтальных ребрах:

$$T^{\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_M}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_M} = \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_N} R^{\alpha'_1}_{\alpha_1}(\beta_1,\beta_2) R^{\alpha'_2}_{\alpha_2}(\beta_2,\beta_3)\ldots R^{\alpha'_N}_{\alpha_N}(\beta_N,\beta_1) \tag{2.1}$$

Величину $T^{\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_M}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_M}$ полезно рассматривать как матричный элемент оператора T, действующего в пространстве $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2 = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$, взятого в базисе $|\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle \otimes \ldots \otimes |\alpha_N\rangle$:

$$T\,|\alpha_1\alpha_2,\ldots,\alpha_N\rangle = T^{\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_M}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N}\,|\alpha'_1\alpha'_2,\ldots,\alpha'_N\rangle$$

(по повторяющимся индексам суммирование). Тогда

$$Z = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}}\, T^M$$

где след берется в пространстве $\mathcal{H}$. Таким образом, для нахождения статсуммы достаточно найти собственные значения матрицы T. Для нахождения удельной свободной энергии в пределе $N, M \to \infty$ достаточно знать асимптотику при $N \to \infty$ наибольшего собственного значения. В силу важности матрица T имеет специальное название. Она называется *трансфер-матрицей* или матрицей перехода, поскольку описывает переход от одного горизонтального ряда вертикальных ребер к следующему. Диагонализация трансфер-матрицы – первая основная задача в теории вершинных моделей. (Вторая основная задача – нахождение корреляционных функций, но она существенно сложнее.)

Обсудим подробнее структуру трансфер-матрицы. Будем считать $R^{\alpha'}_{\alpha}(\beta,\beta')$ 2×2 матрицей $R^{\alpha'}_{\alpha}$ по индескам β,β', у которой матричные элементы в свою очередь являются 2×2 матрицами (по индексам α,α'):

$$(R^{\alpha'}_{\alpha})_{\beta\beta'} = R^{\alpha'}_{\alpha}(\beta,\beta')$$

Иными словами, рассмотрим $R^{\alpha'}_{\alpha}(\beta,\beta')$ как блочную матрицу. Тогда правая часть формулы (2.1) – не что иное, как матричное произведение в горизонтальном (общем для всех) пространстве $\mathbb{C}^2$ (оно называется *вспомогательным пространством*) с последующим взятием следа в нем:

$$T^{\{\alpha'\}}_{\{\alpha\}} = T^{\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_N}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N} = \mathrm{tr}_{\mathbb{C}^2}\Big(R^{\alpha'_1}_{\alpha_1} R^{\alpha'_2}_{\alpha_2}\ldots R^{\alpha'_N}_{\alpha_N}\Big)$$

Таким образом, элементарным строительным блоком является набор больцмановских весов $R^{\alpha'}_{\alpha}(\beta,\beta') = R^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta}$. Их можно объединить в матрицу 4×4 и понимать ее как матрицу линейного оператора в тензорном произведении двух двумерных пространств. Тогда совокупность больцмановских весов задает линейный оператор

$$\mathsf{R}:\ \mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$$

В базисе $|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ он действует так:

$$\mathsf{R} : \, |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle \mapsto R_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} \, |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$$

(по повторяющимся индексам суммирование). Матрица R в базисе $|+\rangle\otimes|+\rangle$, $|-\rangle\otimes|+\rangle$, $|+\rangle \otimes |-\rangle$, $|-\rangle \otimes |-\rangle$ запишется виде

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} R_{++}^{++} & R_{++}^{-+} & R_{++}^{+-} & R_{++}^{--} \\ R_{-+}^{++} & R_{-+}^{-+} & R_{-+}^{+-} & R_{-+}^{--} \\ R_{+-}^{++} & R_{+-}^{-+} & R_{+-}^{+-} & R_{+-}^{--} \\ R_{--}^{++} & R_{--}^{-+} & R_{--}^{+-} & R_{--}^{--} \end{pmatrix}$$

Отметим, что хотя исходно все больцмановские веса были вещественными (и, более того, неотрицательными) числами, с алгебраической точки зрения удобно считать их произвольными комплексными числами.

Наконец, укажем способ компактной безындексной записи трансфер-матрицы. Если имеется тензорное произведение $V_1 \otimes \ldots \otimes V_N$ одинаковых пространств $V_i \cong \mathbb{C}^2$, обозначим R_{ij} оператор, действующий на произведении $V_i \otimes V_j$ как R, а на других как тождественный оператор. Тогда

$$T = \mathrm{tr}_{V_0}\Big(\mathsf{R}_{10}\mathsf{R}_{20}\ldots\mathsf{R}_{N0}\Big)$$

Стоящий под следом оператор $\mathcal{T} = \mathsf{R}_{10}\mathsf{R}_{20}\ldots\mathsf{R}_{N0}$ также имеет специальное название. По историческим причинам (по аналогии с методом обратной задачи) он называется квантовой матрицей монодромии. Его естественно записывать как 2×2 матрицу во вспомогательном пространстве, элементы которой являются операторами в пространстве $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad T = A + D$$

Это по сути трансфер-матрица для цепочки с открытыми концами, спины на которых фиксированы.

2.2 6-вершинная модель

Будем рассматривать лишь те вершины, в которых число входящих стрелок равно числу выходящих, а остальные объявим запрещенными (их больцмановские веса положим равными 0). Таких конфигураций ровно 6 (рис. 3). Они объединяются в пары, соответствующие обращению всех стрелок. Будем считать, что больцмановские веса одинаковы для вершин, получающихся друг из друга обращением всех стрелок. Таким образом, в модели имеются 3 независимых параметра, из которых существенны лишь два, т.к. зависимость от общего множителя тривиальна. Такая модель называется (симметричной) 6-вершинной моделью.

2.2.1 Матрица больцмановских весов 6-вершинной модели

Матрица локальных больцмановских весов для 6-вершинной модели имеет вид

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} R_+^+(+,+) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_-^-(+,+) & R_+^-(+,-) & 0 \\ 0 & R_+^-(-,+) & R_+^+(-,-) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_-^-(-,-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Она называется R-матрицей. Укажем другие способы ее записи, которые в ряде случаев более удобны:

$$\begin{aligned} \mathsf{R} \;&=\; \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sigma_z & c\sigma_- \\ & \\ c\sigma_+ & \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\sigma_z \end{pmatrix} \\ &=\; \frac{a+b}{2}\sigma_0 \otimes \sigma_0 + \frac{a-b}{2}\sigma_z \otimes \sigma_z + \frac{c}{2}\sigma_y \otimes \sigma_y + \frac{c}{2}\sigma_x \otimes \sigma_x \end{aligned}$$

Здесь использованы введенные ранее стандартные матрицы Паули. Матрица больцмановских весов в j-м узле решетки запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathsf{R}_{j0} \;&=\; \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sigma_z^{(j)} & c\sigma_-^{(j)} \\ & \\ c\sigma_+^{(j)} & \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\sigma_z^{(j)} \end{pmatrix} \\ &=\; \frac{a+b}{2}\sigma_0^{(j)} \otimes \sigma_0^{(0)} + \frac{a-b}{2}\sigma_z^{(j)} \otimes \sigma_z^{(0)} + \frac{c}{2}\sigma_y^{(j)} \otimes \sigma_y^{(0)} + \frac{c}{2}\sigma_x^{(j)} \otimes \sigma_x^{(0)} \end{aligned}$$

Задача. Показать, что вектор $|\Omega\rangle = |+++\ldots+\rangle$ является собственным для трансфер-матрицы $T = \mathrm{tr}_{V_0}\Big(\mathsf{R}_{10}\mathsf{R}_{20}\ldots\mathsf{R}_{N0}\Big)$ и найти собственное значение. (Можно показать, что при $a > b + c$ это максимальное собственное значение.)

Задача. Показать, что трансфер-матрица 6-вершинной модели коммутирует с оператором циклического сдвига e^{iP} и оператором $S_z = \sum\limits_{j=1}^{N} \sigma_z^{(j)}$: $[T, e^{iP}] = [T, S_z] = 0$.

Коммутационное соотношение $[T, S_z] = 0$ означает, что количество стрелок, направленных вниз (аналог перевернутых спинов), сохраняется под действием оператора T, т.е. не меняется от слоя к слою. Поэтому собственные векторы можно искать в секторах с фиксированным числом перевернутых стрелок. Например, собственный вектор в N-мерном подпространстве с одной перевернутой стрелкой можно искать в виде

$$\sum_{n=1}^{N} z^n \sigma_-^{(n)} |\Omega\rangle$$

где z – комплексное число, удовлетворяющее условию $z^N = 1$ (в силу периодических граничных условий). Явное построение собственных векторов можно провести и в секторе с произвольным числом перевернутых стрелок, причем оно оказывается абсолютно аналогичным решению XXZ-модели координатным анзацем Бете! (Исторически модель была впервые решена именно этим методом.) Разумеется, этот факт не является случайным и говорит о том, что трансфер-матрица 6-вершинной модели коммутирует с гамильтонианом XXZ-цепочки, и метод Бете дает их общие собственные векторы.

В общей 16-вершинной модели вектор $|\Omega\rangle$ уже не является собственным, а действие трансфер-матрицы не сохраняет число перевернутых стрелок. Так же обстоит дело и в случае 8-вершинной модели, в которой разрешенными являются только вершины с четным числом входящих стрелок. Оказывается, 8-вершинная модель, как и 6-вершинная, является точно решаемой, но координатный анзац Бете к ней неприменим. Ее решение было получено другими, алгебраическими методами (развитыми в первую очередь в работах Р.Бакстера и Ленинградской школы), с которыми мы познакомимся на более простом примере 6-вершинной модели.

2.2.2 Коммутирующие трансфер-матрицы и уравнение Янга-Бакстера

Ключом к алгебраическому решению 6-вершинной модели является нахождение коммутативного семейства трансфер-матриц. Именно, мы покажем, что трансфер-матрицы моделей, для которых

$$\Delta = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

имеет одно и то же значение, коммутируют.

Итак, зададимся вопросом, когда трансфер-матрицы

$$T = \mathrm{tr}_{V_0}\mathcal{T} = \mathrm{tr}_{V_0}\Big(\mathsf{R}_{10}\mathsf{R}_{20}\ldots\mathsf{R}_{N0}\Big)\,, \quad T' = \mathrm{tr}_{V_0}\mathcal{T}' = \mathrm{tr}_{V_0}\Big(\mathsf{R}'_{10}\mathsf{R}'_{20}\ldots\mathsf{R}'_{N0}\Big)$$

коммутируют. Здесь R' – R-матрица с параметрами (a',b',c'). Произведения TT' и $T'T$ можно записать в виде

$$TT' = \mathrm{tr}_{V_0\otimes V_0}\Big(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'\Big)\,, \qquad T'T = \mathrm{tr}_{V_0\otimes V_0}\Big(\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T}\Big)$$

В правых частях $\mathcal{T}$-матрицы перемножаются тензорно, а их элементы – как операторы в $\mathcal{H}$, с соблюдением порядка. Например:

$$\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' & AB' & BA' & BB' \\ AC' & AD' & BC' & BD' \\ CA' & CB' & DA' & DB' \\ CC' & CD' & DC' & DD' \end{pmatrix}$$

Для коммутативности трансфер-матриц достаточно, чтобы существовала невырожденная числовая 4×4 матрица M такая, что

$$\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T} = \mathsf{M}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}')\mathsf{M}^{-1} \quad \text{или} \quad \mathsf{M}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}') = (\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T})\mathsf{M}$$

Тогда следы от $\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'$ и $\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T}$ будут равны в силу цикличности следа.

Пусть P – оператор перестановки сомножителей в тензорном произведении $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$: $\mathsf{P}\,u\otimes v = v\otimes u$. (В главе про модель Гейзенберга этот оператор обозначался как

P_{12}.) В базисе $|+\rangle\otimes|+\rangle$, $|-\rangle\otimes|+\rangle$, $|+\rangle\otimes|-\rangle$, $|-\rangle\otimes|-\rangle$ матрица этого оператора имеет вид

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Если бы матричные элементы $\mathcal{T}$ коммутировали с матричными элементами $\mathcal{T}'$, мы бы имели $\mathsf{P}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}') = (\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T})\,\mathsf{P}$, т.е. в этом простейшем случае, когда следы заведомо коммутируют, $\mathsf{M} = \mathsf{P}$. В общем случае будем искать матрицу M в виде $\mathsf{M} = \mathsf{PR}''$, где R'' – некоторая числовая матрица (смысл такого обозначения выясниться чуть ниже).

"Сплетающее" соотношение

$$\mathsf{PR}''(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}') = (\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T})\mathsf{PR}'' \tag{2.2}$$

будет для нас основным. Полезно переписать его в несколько иной форме. Обозначим $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}\otimes 1$, $\mathcal{T}_2 = 1\otimes\mathcal{T}$, тогда $\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}' = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2'$, а $\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T} = \mathsf{P}\,\mathcal{T}_2'\mathcal{T}_1\,\mathsf{P}$. После этого, помножив обе части нашего соотношения слева на P, запишем его так:

$$\mathsf{R}''_{12}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2' = \mathcal{T}_2'\mathcal{T}_1\mathsf{R}''_{12}$$

Индексы у R'' напоминают, что этот оператор действует в тензорном произведении первого и второго пространств.

Конструктивно матрицу R'' можно найти, наложив более сильное достаточное условие – чтобы такая матрица существовала для каждого R-матричного сомножителя, входящего в $\mathcal{T}$-матрицу, а именно,

$$\mathsf{PR}''(\mathsf{R}\otimes\mathsf{R}') = (\mathsf{R}'\otimes\mathsf{R})\mathsf{PR}'' \qquad \text{или} \qquad \mathsf{R}''_{12}\mathsf{R}_{13}\mathsf{R}'_{23} = \mathsf{R}'_{23}\mathsf{R}_{13}\mathsf{R}''_{12}$$

В этом уравнении обе части – числовые матрицы 8×8, и есть надежда, что его удастся разрешить. В индексной записи

$$\sum_{\mu\nu\lambda} R''^{\,\nu\mu}_{\beta\gamma} R'^{\,\lambda\beta'}_{\alpha\mu} R^{\alpha'\gamma'}_{\lambda\nu} = \sum_{\mu\nu\lambda} R^{\lambda\mu}_{\alpha\beta} R'^{\,\alpha'\nu}_{\lambda\gamma} R''^{\,\gamma'\beta'}_{\mu\nu} \tag{2.3}$$

(где использовано обозначение $R^{\alpha'}_{\alpha}(\beta,\beta') = R^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta}$). Кроме того, предположим, что матрицы R, R', R'' имеют одинаковую структуру и различаются только значениями параметров: (a,b,c) для R, (a',b',c') для R', (a'',b'',c'') для R''.

Условие (2.3) называется уравнением (или системой уравнений) Янга-Бакстера или уравнением треугольников. Его можно представить графически (рис. 4). Это система из 64 уравнений с 3 неизвестными (ненулевыми элементами матрицы R''). Наша задача – выяснить, при каком выборе матриц R, R' система имеет ненулевое решение.

Заметим, во-первых, что в силу свойства $R^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha+\beta \neq \alpha'+\beta'$ большое число уравнений обращаются в тождества $0 = 0$. Что-то ненулевое в обеих частях получается только при $\alpha+\beta+\gamma = \alpha'+\beta'+\gamma'$. В результате остается только 20 нетривиальных уравнений, которые сводятся к 10 с учетом симметрии относительно преобразования $|+\rangle \leftrightarrow |-\rangle$. Четыре из этих десяти уравнений удовлетворяются тождественно, а остальные образуют три пары эквивалентных уравнений. Таким образом, остаются только 3 нетривиальных уравнения. Они имеют вид

$$\begin{cases} ac'a'' = bc'b'' + ca'c'' \\ ab'a'' = cc'b'' + ba'c'' \\ cb'a'' = ca'b'' + bc'c'' \end{cases} \tag{2.4}$$

Рассмотрим их как систему однородных уравнений с неизвестными a'', b'', c''. Ненулевое решение существует, если определитель системы равен 0. Прямое вычисление показывает, что это требование эквивалентно условию

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a'^2+b'^2-c'^2}{2a'b'}$$

Аналогично, рассмотрев эти уравнения как систему однородных уравнений с неизвестными a', b', c', получим

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a''^2+b''^2-c''^2}{2a''b''}$$

Тем самым мы показали, что если величина

$$\Delta = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

одинакова для всех R-матриц R, R', R'', построенные по ним трансфер-матрицы коммутируют.

Для дальнейшего исключительно удобно ввести следующую параметризацию статвесов a, b, c:

$$\begin{cases} a = \rho \sinh(u+\eta) \\ b = \rho \sinh u \\ c = \rho \sinh \eta \end{cases} \tag{2.5}$$

Тогда $\Delta = \cosh\eta$, и трансфер-матрицы коммутируют при различных значениях u, ρ (и одинаковом η). Коммутативность при различных ρ тривиальна, поскольку общий множитель просто выносится и ни на что не влияет. Удобно положить $\rho = 1$. Параметр u называется *спектральным параметром*, и R-матрица, а также все остальные введенные объекты обычно рассматриваются как функции параметра u: $\mathsf{R} = \mathsf{R}(u)$, $T = T(u)$ и т.д. При этом подразумевается, что u может меняться, а η фиксировано, тогда $[T(u), T(u')] = 0$.

Как связаны между собой спектральные параметры R-матриц, входящих в уравнение Янга-Бакстера? Подставив параметризацию (2.5) для каждой R-матрицы (с u, u', u'' и одинаковым η) в условия (2.4), получим

$$u = u' + u''$$

Уравнение Янга-Бакстера примет симметричный вид

$$\mathsf{R}_{12}(u_1-u_2)\mathsf{R}_{13}(u_1-u_3)\mathsf{R}_{23}(u_2-u_3) = \mathsf{R}_{23}(u_2-u_3)\mathsf{R}_{13}(u_1-u_3)\mathsf{R}_{12}(u_1-u_2)$$

(для данной параметризации оно является тождеством), а сплетаюшее соотношение (2.2)

$$\boxed{\check{\mathsf{R}}(u-u')(\mathcal{T}(u)\otimes\mathcal{T}(u'))=(\mathcal{T}(u')\otimes\mathcal{T}(u))\check{\mathsf{R}}(u-u')} \tag{2.6}$$

с матрицей

$$\check{\mathsf{R}}(u)=\mathsf{PR}(u)=\begin{pmatrix} a(u) & 0 & 0 & 0\\ 0 & c & b(u) & 0\\ 0 & b(u) & c & 0\\ 0 & 0 & 0 & a(u)\end{pmatrix}$$

Для удобства укажем явный вид R-матрицы в параметризации (2.5) с $\rho=1$:

$$\begin{aligned}\mathsf{R}(u) &= \begin{pmatrix} \sinh(u+\eta) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sinh u & \sinh\eta & 0\\ 0 & \sinh\eta & \sinh u & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sinh(u-\eta)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \sinh\left(u+\frac{\eta}{2}+\frac{\eta}{2}\,\sigma_z\right) & \sinh\eta\,\sigma_-\\ \\ \sinh\eta\,\sigma_+ & \sinh\left(u+\frac{\eta}{2}-\frac{\eta}{2}\,\sigma_z\right)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.7}$$

Отметим, что $\mathsf{R}(0)=\sinh\eta\;\mathsf{P}$ или, в индексной записи,

$$R_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}(0)=R_{\alpha}^{\alpha'}(0|\beta,\beta')=\sinh\eta\,\delta_{\alpha\beta'}\delta_{\alpha'\beta} \tag{2.8}$$

2.2.3 Связь 6-вершинной модели с XXZ-цепочкой

Пользуясь (2.8), найдем, что оператор $T(0)$ пропорционален оператору циклической перестановки узлов решетки:

$$\boxed{T(0)=(\sinh\eta)^N e^{iP}} \tag{2.9}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}T_{\{\alpha\}}^{\{\alpha'\}}(0) &= (\sinh\eta)^N\sum_{\{\beta\}}\delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\alpha_1'\beta_1}\,\delta_{\alpha_2\beta_3}\delta_{\alpha_2'\beta_2}\,\dots\,\delta_{\alpha_N\beta_1}\delta_{\alpha_N'\beta_N}\\ &= (\sinh\eta)^N\delta_{\alpha_1'\alpha_N}\delta_{\alpha_2'\alpha_1}\dots\delta_{\alpha_N'\alpha_{N-1}}\\ &= (\sinh\eta)^N\left(e^{iP}\right)_{\{\alpha\}}^{\{\alpha'\}}\end{aligned}$$

Связь с XXZ-моделью основана на том замечательном факте, что гамильтониан последней содержится в семействе трансфер-матриц 6-вершинной модели $T(u)$, а именно, $H^{\rm xxz}\propto T^{-1}(0)\partial_u T(u)\Big|_{u=0}+\mathrm{const}$. Точная формула такова:

$$\boxed{H^{\rm xxz}=-\sinh\eta\,\frac{d}{du}\log T(u)\Big|_{u=0}+\;N\cosh\eta} \tag{2.10}$$

Доказательство состоит в прямом вычислении, аналогичном таковому для $T(0)$. В силу важности сделанного утверждения уместно привести некоторые подробности. Имеем по определению:

$$\frac{d}{du}T^{\{\alpha'\}}_{\{\alpha\}}(u)\Big|_{u=0} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{\{\beta\}} R^{\alpha'_1\beta_2}_{\alpha_1\beta_1}(0)\ldots R^{\alpha'_{j-1}\beta_j}_{\alpha_{j-1}\beta_{j-1}}(0)\frac{d}{du}R^{\alpha'_j\beta_{j+1}}_{\alpha_j\beta_j}(u)\Big|_{u=0}R^{\alpha'_{j+1}\beta_{j+2}}_{\alpha_{j+1}\beta_{j+1}}(0)\ldots R^{\alpha'_N\beta_1}_{\alpha_N\beta_N}(0)$$

Под знаками суммы все сомножители кроме j-го являются операторами перестановки типа (2.8), а

$$\mathsf{R}'(0) = \frac{d\mathsf{R}(u)}{du}\Big|_{u=0} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cosh\eta \end{pmatrix} = \frac{\cosh\eta+1}{2}\,1\otimes 1 + \frac{\cosh\eta-1}{2}\,\sigma_z\otimes\sigma_z$$

В индексной записи

$$\frac{d}{du}R^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta}(u)\Big|_{u=0} = \frac{\Delta+1}{2}\,\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} + \frac{\Delta-1}{2}\,(\sigma_z)_{\alpha\alpha'}(\sigma_z)_{\beta\beta'}\,, \qquad \Delta = \cosh\eta$$

Теперь почти все готово для того, чтобы завершить вычисление:

$$\sinh\eta\left(T^{-1}(0)\frac{d}{du}T(u)\Big|_{u=0}\right)^{\{\alpha'\}}_{\{\alpha\}} = \sum_{j=1}^{N}\delta_{\alpha_1\alpha'_1}\ldots\delta_{\alpha_{j-1}\alpha'_{j-1}}\cdot\frac{d}{du}R^{\alpha'_j\alpha'_{j+1}}_{\alpha_{j+1}\alpha_j}(u)\Big|_{u=0}\cdot\delta_{\alpha_{j+2}\alpha'_{j+2}}\ldots\delta_{\alpha_N\alpha'_N}$$

Осталось преобразовать

$$\frac{d}{du}R^{\alpha'_j\alpha'_{j+1}}_{\alpha_{j+1}\alpha_j}(u)\Big|_{u=0} = (\mathsf{P}\mathsf{R}'(0))^{\alpha'_j\alpha'_{j+1}}_{\alpha_j\alpha_{j+1}} = \left(\mathsf{P} + \frac{\Delta}{2}(1+\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(j+1)})\right)^{\alpha'_j\alpha'_{j+1}}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}$$

и получить

$$\sinh\eta\, T^{-1}(0)\frac{d}{du}T(u)\Big|_{u=0} = \sum_{j=1}^{N}\left(P_{j,j+1} + \frac{\Delta-1}{2}(1+\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(j+1)})\right)$$

что эквивалентно (2.10).

3 Алгебраический анзац Бете

3.1 Алгебраический анзац Бете в 6-вершинной модели

Сплетающее соотношение (2.6)

$$\check{\mathsf{R}}(u-u')(\mathcal{T}(u)\otimes\mathcal{T}(u')) = (\mathcal{T}(u')\otimes\mathcal{T}(u))\check{\mathsf{R}}(u-u') \qquad (3.1)$$

играет основную роль в теории интегрируемых моделей статистической физики на двумерной решетке, а также интегрируемых моделей физики твердого тела и теории поля. С алгебраической точки зрения оно задает коммутационные соотношения между генераторами бесконечномерной алгебры (квантовой аффинной алгебры), порождаемой коэффициентами разложения матричных элементов матрицы $\mathcal{T}(u)$ по u.

Уравнение Янга-Бакстера эквивалентно ассоциативности этой алгебры, а реализация сплетающего соотношения для 6-вершинной модели матрицами больцмановских весов означает выбор ее специального конечномерного представления. Процедура построения собственных векторов трансфер-матрицы с помощью алгебраических свойств введенных операторов называется алгебраическим анзацем Бете. Далее в этом разделе мы проследим основные моменты этой конструкции в случае, когда R-матрица имеет вид

$$\check{\mathsf{R}}(u) = \begin{pmatrix} a(u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b(u) & 0 \\ 0 & b(u) & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(u) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

с $a = \sinh(u+\eta)$, $b = \sinh u$, $c = \sinh \eta$.

Матричные элементы квантовой матрицы монодромии

$$\mathcal{T}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}$$

представляют собой некоторые операторы в пространстве $\mathcal{H} \cong (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$. Поэлементное выписывание соотношений, содержащихся в (3.1), дает правила коммутации этих операторов. Ниже мы приведем только те соотношения, которые понадобятся для вычислений.

Во-первых, одноименные элементы коммутируют при различных значениях спектрального параметра: $[A(u), A(v)] = 0$, $[B(u), B(v)] = 0$, и т.д. Во-вторых, имеют место коммутационные соотношения

$$a(u-v)B(u)A(v) = cB(v)A(u) + b(u-v)A(v)B(u) \tag{3.3}$$

$$a(u-v)B(v)D(u) = cB(u)D(v) + b(u-v)D(u)B(v) \tag{3.4}$$

Задача. Выписать все соотношения на операторы $A(u)$, $B(u)$, $C(u)$, $D(u)$, содержащиеся в (3.1).

Рассмотрим опять вектор $|\Omega\rangle = |+ + + \ldots +\rangle$. Нетрудно увидеть, что он является собственным для операторов $A(u)$ и $D(u)$, а $C(u)$ уничтожает его:

$$A(u)\,|\Omega\rangle = a^N(u)\,|\Omega\rangle\,, \quad D(u)\,|\Omega\rangle = b^N(u)\,|\Omega\rangle\,, \quad C(u)\,|\Omega\rangle = 0$$

Вектор $|\Omega\rangle$ будем называть порождающим, поскольку все остальные собственные вектора трансфер-матрицы будут строиться многократным применением к нему операторов $B(u)$.

Теорема. *Векторы*

$$|\Phi(u_1, \ldots, u_n)\rangle = \prod_{j=1}^{n} B(u_j)\ |\Omega\rangle$$

являются собственными векторами трансфер-матрицы ($\mathsf{T}(u)\,|\Phi\rangle = T(u)\,|\Phi\rangle$) *при условии, что числа u_j удовлетворяют системе уравнений Бете*

$$\frac{a^N(u_j)}{b^N(u_j)} = (-1)^{n-1} \prod_{k=1,\neq j}^{n} \frac{a(u_j-u_k)}{a(u_k-u_j)} \tag{3.5}$$

или
$$\left(\frac{\sinh(u_j+\eta)}{\sinh u_j}\right)^N = \prod_{k=1,\neq j}^{n} \frac{\sinh(u_j-u_k+\eta)}{\sinh(u_j-u_k-\eta)}$$
причем собственное значение $T(u) = T(u; u_1, \ldots, u_n)$ дается формулой
$$T(u; u_1, \ldots, u_n) = a^N(u) \prod_{j=1}^{n} \frac{a(u_j-u)}{b(u_j-u)} + b^N(u) \prod_{j=1}^{n} \frac{a(u-u_j)}{b(u-u_j)}$$
или
$$T(u; u_1, \ldots, u_n) = \sinh^N(u+\eta) \prod_{j=1}^{n} \frac{\sinh(u-u_j-\eta)}{\sinh(u-u_j)} + \sinh^N u \prod_{j=1}^{n} \frac{\sinh(u-u_j+\eta)}{\sinh(u-u_j)}$$

Доказательство. Перепишем нужные нам коммутационные соотношения (3.3), (3.4) в более удобном виде:
$$A(u)B(v) = \frac{a(v-u)}{b(v-u)}\, B(v)A(u) - \frac{c}{b(v-u)}\, B(u)A(v)$$
$$D(u)B(v) = \frac{a(u-v)}{b(u-v)}\, B(v)D(u) - \frac{c}{b(u-v)}\, B(u)D(v)$$
С помощью этих соотношений можно преобразовать выражение
$$(A(u)+D(u)) \prod_{j=1}^{n} B(u_j)\ |\Omega\rangle$$
пронося $A(u)$ и $D(u)$ через $B(u_j)$ направо до встречи с вектором $|\Omega\rangle$, который является для них собственным. При этом возникают 2^n слагаемых, которые собираются в выражения вида
$$T(u) \prod_{k=1}^{n} B(u_k)\ |\Omega\rangle$$
и
$$\Lambda_j(u)\, B(u) \prod_{k=1,\neq j}^{n} B(u_k)\ |\Omega\rangle$$
с некоторыми числовыми множителями $T(u)$ и $\Lambda_j(u)$. Первое из этих выражений получается, если при коммутации учитывать только первые слагаемые в правых частях коммутационных соотношений. Действительно, если на каком-то шаге воспользоваться вторым слагаемым, возникнет оператор $B(u)$, который потом исчезнуть уже не может. Таким образом, $T(u)$ дается выражением для собственного значения, приведенным выше. Однако, пока мы еще не можем сказать, что наш вектор собственный, поскольку имеются “плохие члены”. Коэффициент $\Lambda_j(u)$ можно найти, пронеся сначала $A(u)+D(u)$ через $B(u_j)$ и пользуясь при этом вторыми слагаемыми, а потом, при дальнейшем проносе направо, пользоваться опять только первыми слагаемыми. В результате получается:
$$\Lambda_j(u) = -\frac{c}{b(u_j-u)} \left(a^N(u_j) \prod_{k=1,\neq j}^{n} \frac{a(u_k-u_j)}{b(u_k-u_j)} - b^N(u_j) \prod_{k=1,\neq j}^{n} \frac{a(u_j-u_k)}{b(u_j-u_k)} \right)$$
Для того чтобы все плохие члены исчезли, достаточно потребовать $\Lambda_j(u) = 0$ при всех $j = 1, \ldots, n$, что эквивалентно системе уравнений Бете.

3.2 Модели общего вида с тригонометрической R-матрицей

Польза рассмотренного в предыдущем разделе алгебраического метода не ограничивается только элегантным решением 6-вершинной модели. Что, возможно, даже более важно, алгебраический анзац Бете позволяет существенно расширить запас интегрируемых моделей.

Начнем с того, что перепишем R-матрицу (2.7) на j-м узле в виде

$$\mathsf{L}_j(u) = \begin{pmatrix} \sinh\Bigl(u + \frac{\eta}{2}\,\sigma_z^{(j)}\Bigr) & \sinh\eta\sigma_-^{(j)} \\ \\ \sinh\eta\sigma_+^{(j)} & \sinh\Bigl(u - \frac{\eta}{2}\,\sigma_z^{(j)}\Bigr) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

и назовем *квантовым L-оператором* (терминология восходит к методу обратной задачи рассеяния). Очевидно, $\mathsf{L}_j(u) = \mathsf{R}_{j0}(u-\frac{\eta}{2})$, а также $\mathcal{T}(u) = \mathsf{L}_1(u)\mathsf{L}_2(u)\ldots\mathsf{L}_N(u)$, где мы переопределили $\mathcal{T}(u)$ сдвигом аргумента на $\frac{\eta}{2}$. Квантовый L-оператор можно рассматривать как “элементарную” квантовую матрицу монодромии (для модели на одном узле). Ясно поэтому, что L-оператор удовлетворяет основному сплетающему соотношению

$$\check{\mathsf{R}}(u-v)(\mathsf{L}(u)\otimes\mathsf{L}(v)) = (\mathsf{L}(v)\otimes\mathsf{L}(u))\check{\mathsf{R}}(u-v) \tag{3.7}$$

с R-матрицей

$$\check{\mathsf{R}}(u) = \begin{pmatrix} \sinh(u+\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh\eta & \sinh u & 0 \\ 0 & \sinh u & \sinh\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sinh(u+\eta) \end{pmatrix}$$

Действие элементов L-оператора на вектор $|+\rangle$ таково:

$$\mathsf{L}(u)\,|+\rangle = \begin{pmatrix} \sinh\Bigl(u+\frac{\eta}{2}\Bigr) & \star \\ 0 & \sinh\Bigl(u-\frac{\eta}{2}\Bigr) \end{pmatrix} |+\rangle \tag{3.8}$$

Звездочкой обозначен несущественный для нас ненулевой элемент.

Обобщение, позволяющее породить широкий класс моделей, которые решаются тем же методом, основано на замечании, что сплетающее соотношение (3.1) для квантовых матриц монодромии останется в силе, если спектральный параметр в каждом L-операторе в произведении по цепочке сдвигать на произвольные зависящие от номера узла величины:

$$\mathcal{T}(u) = \mathsf{L}_1(u-\xi_1)\,\mathsf{L}_2(u-\xi_2)\,\ldots\,\mathsf{L}_N(u-\xi_N) \tag{3.9}$$

(Разумеется, сплетающее соотношение (3.1) для $\mathcal{T}(u)$, $\mathcal{T}(v)$ и вытекающая из него коммутативность их следов имеет место, если только параметры ξ_i одинаковы в обеих матрицах.) Такая $\mathcal{T}$-матрица называется матрицей монодромии неоднородной цепочки, а величины ξ_i – неоднородностями в узлах. Наряду с η они являются параметрами, задающими модель. Тем самым мы построили бесконечно-параметрическое семейство моделей, трансфер-матрицы которых поддаются диагонализации с помощью того же алгебраического анзаца Бете. В математическом отношении неоднородные модели ничем не хуже (а, возможно, даже лучше) однородной 6-вершинной модели или XXZ-цепочки. С физической точки зрения, однако, их недостатком является то, что как правило не удается найти локальный гамильтониан, который можно было бы включить в построенное коммутирующее семейство. Поэтому вместо “мы построили модель”, физик бы в этом месте сказал “мы построили однопараметрическое семейство коммутирующих операторов”.

Важным условием применимости алгебраического анзаца Бете было существование вакуумного вектора $|\Omega\rangle$ – такого, что $C(u)\,|\Omega\rangle = 0$ и собственного для $A(u), D(u)$, т.е. такого, что

$$\mathcal{T}(u)\,|\Omega\rangle = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix} |\Omega\rangle = \begin{pmatrix} a(u) & \star \\ 0 & d(u) \end{pmatrix} |\Omega\rangle$$

с некоторыми функциями $a(u)$, $d(u)$ (функция $a(u)$ этом разделе отличается от той, что обозначалась через $a(u)$ в разделе про 6-вершинную модель!). Свойство (3.8) означает, что в нашей обобщенной модели в качестве вакуумного вектора можно взять $|\Omega\rangle = |+++\ldots+\rangle$, тогда

$$a(u) = \prod_{j=1}^{N} \sinh\Big(u - \xi_j + \frac{\eta}{2}\Big)\,, \qquad d(u) = \prod_{j=1}^{N} \sinh\Big(u - \xi_j - \frac{\eta}{2}\Big)$$

Функции такого вида будем называть *тригонометрическими полиномами* (степени N).

Можно пойти еще дальше и взять функцию $r(u) = a(u)/d(u)$ с условием периодичности $r(u + 2\pi i) = r(u)$ в качестве *функционального* параметра модели. (Будем называть ее обобщенной XXZ моделью.) Действительно, устремляя $N \to \infty$ и выбирая должным образом ξ_i, можно формально получить любую разумную функцию.

Для обобщенной модели с вакуумным вектором существует общая алгебраическая процедура диагонализации коммутативного семейства операторов $\mathrm{tr}\,\mathcal{T}(u) = A(u) + D(u)$.

Теорема. *Векторы*

$$|\Phi(u_1, \ldots, u_n)\rangle = \prod_{j=1}^{n} B(u_j)\ |\Omega\rangle$$

являются собственными векторами трансфер-матрицы ($\mathsf{T}(u)\,|\Phi\rangle = T(u)\,|\Phi\rangle$) при условии, что числа u_j удовлетворяют системе уравнений Бете

$$\frac{a(u_j)}{d(u_j)} = \prod_{k=1,\neq j}^{n} \frac{\sinh(u_j - u_k + \eta)}{\sinh(u_j - u_k - \eta)} \tag{3.10}$$

причем собственное значение $T(u) = T(u; u_1, \ldots, u_n)$ дается формулой

$$T(u; u_1, \ldots, u_n) = a(u) \prod_{j=1}^{n} \frac{\sinh(u - u_j - \eta)}{\sinh(u - u_j)} + d(u) \prod_{j=1}^{n} \frac{\sinh(u - u_j + \eta)}{\sinh(u - u_j)} \tag{3.11}$$

Доказательство полностью аналогично таковому для 6-вершинной модели.

Q-оператор Бакстера и TQ-соотношение. Обратим внимание на то, что система уравнений Бете в точности эквивалентна тому, что собственное значение трансфер-матрицы $T(u) = T(u; u_1, \ldots, u_n)$ (3.11) не имеет полюсов в точках $u = u_i$. На этом замечании основан альтернативный метод получения уравнений Бете. Именно, из того, что трансфер-матрицы коммутируют при всех u следует, что они могут быть приведены к диагональному виду преобразованием, не зависящим от u, а тогда, поскольку все их матричные элементы – тригонометрические полиномы степени N, таковыми должны быть и все их собственные значения. Поэтому надо потребовать, чтобы правая часть (3.11) была регулярной функцией в конечной части комплексной плоскости. Требование равенства нулю вычетов в точках u_i и даст систему уравнений Бете (3.10).

Обозначим

$$Q(u) = \prod_{j=1}^{n} \sinh(u - u_j)$$

тогда соотношение (3.11) можно записать в виде

$$T(u)Q(u) = a(u)Q(u - \eta) + d(u)Q(u + \eta) \tag{3.12}$$

а уравнения Бете в виде

$$\frac{a(u_j)}{d(u_j)} = -\frac{Q(u_j + \eta)}{Q(u_j - \eta)}$$

Оказывается, можно построить *оператор* $\mathsf{Q}(u)$ такой, что а) он коммутирует со всеми трансфер-матрицами, т.е. $[\mathsf{T}(u), \mathsf{Q}(v)] = 0$ при всех u, v и б) его собственные значения на бетевских векторах $|\Phi(u_1, \ldots, u_n)\rangle$ равны $Q(u)$. Соотношение (3.12) запишется тогда в операторном виде:

$$\mathsf{T}(u)\mathsf{Q}(u) = a(u)\mathsf{Q}(u - \eta) + d(u)\mathsf{Q}(u + \eta)$$

Оно называется TQ-соотношением, а $\mathsf{Q}(u)$ – Q-оператором Бакстера.

Список литературы

[1] Н.М. Боголюбов, А.Г. Изергин, В.Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи*, Москва, “Наука”, 1992.

[2] М. Годен, *Волновая функция Бете*, Москва, “Мир”, 1987.

[3] Р.Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, М., Мир, 1985.

[4] Л. Тахтаджян, Л. Фаддеев, *Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга*, УМН **34:5** (1979) 13-63.

[5] Л. Тахтаджян, Л. Фаддеев, *Спектр и рассеяние возбуждений в одномерном изотропном магнетике Гейзенберга*, Записки научных семинаров ЛОМИ, **109** (1981) 134-178.

[6] А.А. Белавин, А.Г. Кулаков, Р.А. Усманов, “Лекции по теоретической физике”, 2-е изд., испр. и доп., М., МЦНМО, 2001

[7] F. Franchini, *Notes on Bethe ansatz techniques*, http://people.sissa.it/ ffranchi/BAnotes.pdf