Задачи (весна 2014, часть 1)

1. Пусть $|\phi_n\rangle,\ n = 0, 1, \ldots$ - нормированные собственные состояния физической системы. Рассмотрим состояние вида
$$|\phi_\alpha\rangle = e^{-\bar{\alpha}\alpha/2} \sum_{n=0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\phi_n\rangle,$$
где α – произвольное комплексное число.

   - Вычислить скалярное произведение $\langle\phi_\alpha|\phi_\beta\rangle$.
   - Вычислить оператор $\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, |\phi_\alpha\rangle\langle\phi_\alpha|$, где $\alpha = x + \mathrm{i}y$ и интеграл берется по всей комплексной плоскости (x, y).

2. Дан гармонический осциллятор с частотой ω и массой $m = 1$. Пусть $|\phi_\alpha\rangle$ - нормированное когерентное состояние, то есть $\hat{a}|\phi_\alpha\rangle = \alpha|\phi_\alpha\rangle$, $\hat{a}$ - оператор уничтожения осциллятора.

   - Найти среднее значение координаты и импульса и их дисперсии в когерентном состоянии.
   - Найти среднее значение энергии в когерентном состоянии.
   - Найти матричный элемент
   $$\langle\phi_\alpha|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hat{H}}|\phi_\beta\rangle.$$

3. Найти состояния осциллятора, минимизирующие соотношение неопределенности.

4. Дан гармонический осциллятор с частотой ω и массой $m = 1$.

   - Пусть в момент времени $t = 0$ осциллятор находится в состоянии $|\phi_\alpha\rangle$ - нормированном когерентном состоянии, то есть $\hat{a}|\phi_\alpha\rangle = \alpha|\phi_\alpha\rangle$, $\hat{a}$ - оператор уничтожения осциллятора. В момент времени t измеряется энергия осциллятора и она оказывается равной $5/2\hbar\omega$.

     Найти вероятность этого события.
   - Пусть в момент времени $t = 0$ осциллятор находится в состоянии $|\phi\rangle = (|A\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}|B\rangle)/\sqrt{2}$, где $|A\rangle, |B\rangle$ - собственные состояния гамильтониана с энергиями $3\hbar\omega/2, 5\hbar\omega/2$, соответственно.

Найти среднее значение оператора координаты и импульса в момент времени t.

- Пусть в момент времени $t = 0$ осциллятор находится в основном состоянии. Внезапно частота осциллятора меняется и становится равной Ω.

  Найти вероятность того, что осциллятор останется в основном состоянии.

- Пусть в момент времени $t = 0$ осциллятор находится в основном состоянии. Внезапно осциллятор смещают на расстояние a.

  Найти вероятность того, что осциллятор окажется в состоянии с энергией $(n + 1/2)\hbar\omega$.

5. Пусть $\hat{a}^+, \hat{a}$ - операторы рождения и уничтожения, соответственно, то есть $[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{I}$. Найти собственные значения и собственные состояния операторов (ε - действительное число α - комплексное число, λ - действительное число).

   - $\hat{H} = \varepsilon\hat{a}^+\hat{a} + \alpha\hat{a}^+ + \bar{\alpha}\hat{a}$
   - $\hat{H} = \varepsilon\hat{a}^+\hat{a} + \alpha(\hat{a}^+)^2 + \bar{\alpha}\hat{a}^2$
   - $\hat{H} = \lambda(\hat{a}^+)^2(\hat{a})^2 + \varepsilon\hat{a}^+\hat{a}$

6. Дан гамильтониан $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + \lambda\hat{q}^{2n}$, $n \geq 1$, $\hat{p}, \hat{q}$ - канонически сопряженные импульс и координата, соответственно.

   - Показать, что в собственном состоянии гамильтониана $|\phi_n\rangle$ выполнено равенство
   $$\langle\phi_n|\frac{\hat{p}^2}{2m}|\phi_n\rangle = \lambda n\langle\phi_n|\hat{q}^{2n}|\phi_n\rangle.$$

7. Дана прямоугольная яма
   $$U(q) = \begin{cases} 0, & 0 < q < a \\ U_0, & q \leq 0, q \geq a \end{cases}.$$

   - Найти собственные значения энергии и собственные состояния в пределе $U_0 \to \infty$ при фиксированном значении a.
   - Найти собственные значения энергии и собственные состояния в пределе $a \to \infty$ при фиксированном значении U_0.

- Найти собственные значения энергии и собственные состояния в пределе $U_0 \to \infty, a \to 0$ при фиксированном значении $U_0 a = \kappa$.

8. . Дана потенциальная энергия

$$U(q) = \begin{cases} -U_0, & -a < q < a \\ V_0, & -b < q \leq -a, a \leq q < b \\ 0, & q \leq -b, q \geq a \end{cases} .$$

- Найти условие существования связанного состояния.

9. Дана прямоугольная яма

$$U(q) = \begin{cases} -U_0, & 0 < q < a \\ 0, & q \leq 0, q \geq a \end{cases} .$$

- Найти условия, при которых в яме больше одного уровня.

10. Частица массы $m = 1$ движется по прямой в потенциале $U = -\delta(q-a) - \delta(q+a)$.

- Построить графики зависимости энергии связанных состояний от величины a. Решить задачу в импульсном представлении.

11. Частица с массой m движется по прямой в потенциале $U = -\kappa\delta(x)$. На расстоянии l от ямы находится непроницаемая стенка.

- Найти условие существования связанного состояния.

12. Даны операторы

$$\hat{A} = \frac{1}{4}((\hat{a}^+)^2 + \hat{a}^2),\ \hat{B} = \frac{1}{4}(\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+),\ \hat{C} = \frac{\mathrm{i}}{4}((\hat{a}^+)^2 - \hat{a}^2),$$

где $\hat{a}^+, \hat{a}$ - операторы рождения и уничтожения, соответственно, то есть $[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{I}$.

- Найти $[\hat{A}, \hat{B}], [\hat{B}, \hat{C}], [\hat{C}, \hat{A}]$.