Спецкурс. Весенний семестр 2014 года

"Римановы поверхности, квазиконформные отображения и пространства модулей"

Для студентов 3-4 курсов, студентов магистратуры и аспирантов

С.М.Натанзон, А.А.Глуцюк

Римановыми поверхностями называют одномерные комплексные многообразия. Категория компактных римановых поверхностей изоморфна, однако, еще двум замечательным категориям: категории компактных двумерных римановых многообразий постоянной кривизны и категории комплексных алгебраических кривых. Римановы поверхности являются, таким образом, фундаментом для изучения основных направлений современной геометрии: теории комплексных многообразий, дифференциальной и алгебраической геометрий.

В последние десятилетия римановы поверхности стали еще и одним из основных инструментов математической физики. На них основаны, например, современные модели единой теории поля.

Во многих задачах комплексной геометрии и динамики важно рассматривать пространство неизоморфных римановых поверхностей, или пространство модулей. Оказывается, что оно является конечномерным комплексным многообразием с особенностями и имеет каноническую полную финслерову метрику: метрику Тейхмюллера. Исследование геодезического потока метрики Тейхмюллера – важное и быстроразвивающееся направление современной теории динамических систем, связанное, в частности, с плоскими бильярдами. Определение и свойства метрики Тейхмюллера основаны на теории квазиконформных отображений римановых поверхностей: гомеоморфизмов с равномерно ограниченным искажением. Основная теорема теории квазиконформных отображений утверждает, что всякая двумерная компактная ориентируемая поверхность, снабженная произвольным измеримым ограниченным семейством «операторов комплексного умножения на i» в касательных плоскостях, квазиконформно гомеоморфна римановой поверхности.

Курс нацелен на освоение главных свойств римановых поверхностей, пространства модулей и квазиконформных отображений и на их использование в современной геометрии и динамике.

Программа курса

1. Категория римановых поверхностей. Формула Римана-Гурвица.
2. Униформизация.
3. Гиперболическая геометрия.
4. Фуксовы группы.

5. Геометрия фуксовых групп.
7. Пространство типа Фрике-Клейна.
8. Модулярная группа и пространство модулей.
9. Основная теорема о квазиконформных отображениях.
10. Применение в клейновых группах: теорема Альфорса.
11. Пространства Тейхмюллера и пространства модулей.
12. Комплексная структура на пространстве модулей.
13. Квадратичные дифференциалы.
14. Координаты на пространстве Тейхмюллера.