ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

ЛИСТОК 1: КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБР ЛИ И КОГОМОЛОГИИ ГРУПП

Весна 2014 года

Задача 1. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем k. Введем на комплексе коцепей $C^*(\mathfrak{g}) = C^*(\mathfrak{g}, k)$ умножение по формуле

$$(\xi \wedge \eta)(x_1, \dots, x_{p+q}) = \sum_{\sigma \in S_{p+q}/S_p \times S_q} (-1)^{|\sigma|} \xi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \eta(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)})$$

для $\xi \in C^p(\mathfrak{g})$ и $\eta \in C^q(\mathfrak{g})$.

а) Объясните, как определить знак $(-1)^{|\sigma|} = \pm 1$ в формуле выше, чтобы она имела смысл.

б) Покажите, что умножение согласовано с дифференциалом в $C^*(\mathfrak{g})$ по формуле $d(\xi \wedge \eta) = d(\xi) \wedge \eta + (-1)^{|\xi|} \xi \wedge d(\eta)$, где $\xi \in C^{|\xi|}(\mathfrak{g})$.

в) Пользуясь предыдущим пунктом, постройте умножение на $H^*(\mathfrak{g}) = H^*(\mathfrak{g}, k)$, индуцированное умножением $\wedge$ на $C^*(\mathfrak{g})$.

г) Для любого $\mathfrak{g}$-модуля M, постройте естественную структуру градуированного $H^*(\mathfrak{g})$-модуля на $H^*(\mathfrak{g}, M)$.

Задача 2. а) Перечислите все алгебры Ли размерности 1 и 2 над k. Для всех полученных алгебр Ли $\mathfrak{g}$ вычислите кольцо когомологий $H^*(\mathfrak{g})$. Для всех $\mathfrak{g}$-модулей M размерности 1 над k вычислите $H^*(\mathfrak{g})$-модуль $H^*(\mathfrak{g}, M)$.

Вычислите кольца когомологий $H^*(\mathfrak{g})$ для

б) алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ матриц 2×2 над k с нулевым следом (относительно операции коммутатора $[A, B] = AB - BA$);

в) алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_3$ строго верхнетреугольных матриц 3×3 (с нулями на диагонали) над k (относительно той же операции).

Задача 3. а) Для любых групп G и A, вычислите пунктированное множество когомологий $H^1(G, A)$ группы G с коэффициентами в неабелевом G-модуле A с тривиальным действием G.

б) Для любой группы G, вычислите группу гомологий $H_1(G, \mathbb{Z})$ группы G с коэффициентами в тривиальном G-модуле $\mathbb{Z}$.

Задача 4. Вычислите группы гомологий и когомологий $H_*(\mathbb{Z}, M)$ и $H^*(\mathbb{Z}, M)$ бесконечной циклической группы $\mathbb{Z}$ с коэффициентами в произвольном модуле M над ней.

Задача 5*. Вычислите группы гомологий и когомологий $H_*(\mathbb{Z}/n, M)$ и $H^*(\mathbb{Z}/n, M)$ циклической группы $\mathbb{Z}/n$ с коэффициентами в произвольном модуле M над ней, и покажите, что они периодичны с периодом 2 (начиная с размерности $* = 1$).

Задача 6. а) Для любых модулей C и A над группой G определите структуру G-модуля на группе всех гомоморфизмов абелевых групп $\mathrm{Hom}(C, A)$ так, чтобы подгруппа инвариантных элементов $\mathrm{Hom}(C, A)^G$ совпала с группой всех гомоморфизмов G-модулей $C \longrightarrow A$.

б) Для любой структуры G-модуля на свободной абелевой группе C и любого G-модуля A постройте биекцию между классами изоморфизма точных последовательностей G-модулей $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ и элементами группы когомологий $H^1(G, \mathrm{Hom}(C, A))$.

Задача 7. а) Для любой группы G с абелевой нормальной подгруппой $M \subset G$ и факторгруппой $H = G/M$ определите естественную структуру H-модуля на абелевой группе M.

б) Для любой группы H и H-модуля M постройте биекцию между классами изоморфизма точных последовательностей $0 \longrightarrow M \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1$ как в пункте а), для которых индуцированное действие H на M совпадает с наперед заданным, и элементами группы когомологий $H^2(H, M)$.

Задача 8. а) Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем k и $\mathfrak{g}$-модулей C и A, постройте операции сложения и умножения на скаляры из k на классах изоморфизма точных последовательностей $\mathfrak{g}$-модулей $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$, превращающие множество таких классов изоморфизма в векторное пространство над k, изоморфное $H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_k(C, A))$.

б) Тот же вопрос для классов изоморфизма расширений алгебр Ли $0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$ с помощью $\mathfrak{g}$-модуля $\mathfrak{a}$.

К рассмотрению произвольных сечений и связанных с ними коцепей не прибегайте. Пользуйтесь обычными операциями на векторных пространствах.

Задача 9. а) Для любой группы G, абелевой группы A и G-модуля M, для которого $H^{i-1}(G, M) = 0$, постройте изоморфизм $H^i(G, \mathrm{Hom}(M, A)) \simeq \mathrm{Hom}(H_i(G, M), A)$ (где структура G-модуля на $\mathrm{Hom}(M, A)$ индуцирована структурой G-модуля на M и тривиальной структурой G-модуля на A).

Центральным расширением группы H с ядром A называется абелево расширение $0 \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1$ (как в задаче 7), для которого индуцированное действие группы H на абелевой группе A тривиально.

б) Для любой группы H, совпадающей со своим коммутантом, постройте естественное центральное расширение $0 \longrightarrow A \longrightarrow \widetilde{H} \longrightarrow H \longrightarrow 1$ группы H с ядром $A = H_2(H, \mathbb{Z})$ (где действие H на $\mathbb{Z}$ тривиально).

в) Покажите, что для любого центрального расширения $0 \longrightarrow B \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1$ группы H существует единственный гомоморфизм групп $\widetilde{H} \longrightarrow G$, образующий коммутативную диаграмму с проекциями $\widetilde{H} \longrightarrow H$ и $G \longrightarrow H$. Другими словами, $\widetilde{H} \longrightarrow H$ является *универсальным центральным расширением* группы H, совпадающей со своим коммутантом.

Абелева группа $H_2(H, \mathbb{Z})$ называется *мультипликатором Шура* группы H, совпадающей со своим коммутантом.