

*Задача 1.* Пусть  $s(\alpha)$  – сечение кокасательного расслоения на  $L$ , соответствующее 1-форме  $\alpha \in \Omega^1(L)$  (значение сечения  $s(\alpha)$  в точке  $q \in L$  равно  $\alpha(q)$ , такое сечение называется графиком 1-формы).

а) Докажите, что многообразие  $s(\alpha)$  лагранжево, если и только если  $d\alpha = 0$ ;

б) Для двух замкнутых 1-форм  $\alpha, \beta$  на  $L$  построить симплектический диффеоморфизм  $g: T^*L \rightarrow T^*L$ , такой что  $g(s(\alpha)) = s(\beta)$ . Единственен ли такой симплектоморфизм?

*Задача 2.* Пусть лагранжево подмногообразие лежит в гладкой гиперповерхности в симплектическом многообразии. Доказать, что поле характеристических направлений этой гиперповерхности касается этого лагранжева многообразия.

*Задача 3.* Рассмотрим симплектическую структуру  $f(p, q)dp \wedge dq$  на плоскости с координатами  $(p, q)$ . Вычислите в этих координатах гамильтоново векторное поле с гамильтонианом  $H$ .

*Задача 4.* Рассмотрим гамильтонов поток  $\varphi^t$  на  $T^*M$  с гамильтонианом  $H$ . Пусть образ нулевого сечения под действием  $\varphi^t$  является графиком 1-формы  $\alpha(t)$ . Найдите  $\frac{d}{dt}|_{t=0}\alpha(t)$ .

*Задача 5.* Рассмотрим гиперповерхность  $\Gamma$  в стандартном симплектическом пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$  ( $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$ ), заданную уравнением  $\sum p_i^2 = 1$ .

а) Найдите характеристики этой гиперповерхности.

б) Докажите, что многообразие характеристик симплектоморфно  $T^*S^{n-1}$ .

*Задача 6.* Рассмотрим гиперповерхность  $\Gamma$  в стандартном симплектическом пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$  ( $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$ ), заданную уравнением  $\sum p_i^2 + q_i^2 = c$  ( $c > 0$ ).

а) Найдите характеристики этой гиперповерхности.

б) Докажите, что многообразие характеристик диффеоморфно  $\mathbb{C}P^{n-1}$ .

в) Выпишите, при  $n = 2$ , симплектическую структуру  $\omega_c$  в какой-нибудь стандартной карте на  $\mathbb{C}P^1$  и найдите площадь (интеграл от  $\omega_c$ ) по этой проективной прямой.

г)\* Прodelайте это же для карты и объема (интеграла от  $\omega_c^{n-1}$ ) пространства  $\mathbb{C}P^{n-1}$ .