Задачи по группам и алгебрам Ли – 2

1. Опишите все связные коммутативные группы Ли.

2. Опишите все гомоморфизмы между связными коммутативными группами Ли.
3. Рассмотрим множество L_n всех Лагранжевых подпространств в $\mathbb{R}^{2n}$ (то есть таких подпространств V, что $\dim V = n$ и $\omega(x,y) = 0$ для всех $x, y \in V$, где ω – стандартная симплектическая форма). Докажите, что группа $Sp(2n, \mathbb{R})$ транзитивно действует на L_n. Найдите размерность L_n.

4. *Алгеброй Гейзенберга* называется 3-мерная алгебра Ли строго верхнетреугольных матриц 3×3. **а)** Выпишите явно в каком-нибудь базисе операцию коммутатора и укажите все идеалы в этой алгебре Ли. **б)** Укажите какую-нибудь связную группу Ли с такой алгеброй Ли, и докажите, что соответствующее экспоненциальное отображение сюръективно.

5. **а)** Найдите алгебру Ли (укажите какой-нибудь базис и выпишите операцию коммутатора в этом базисе) всех дифференцирований кольца $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$. **б)** Найдите все идеалы в этой алгебре Ли.

6. Пусть D – дифференцирование некоторой конечномерной алгебры A (не обязательно ассоциативной). Докажите, что $\exp D$ – автоморфизм алгебры A.

7. Найдите алгебру Ли дифференцирований и группу Ли автоморфизмов ассоциативной алгебры **а)** двойных чисел $\mathbb{R}[x]/(x^2)$; **б)** кватернионов; **в)** матриц 2×2.

8. **а)** Покажите, что 3-мерное пространство векторных полей на комплексной прямой вида $(az^2+bz+c)\frac{\partial}{\partial z}$, где $a, b, c \in \mathbb{C}$, замкнуто относительно коммутатора и образует алгебру Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. **б)** Получилось представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ в пространстве $\mathbb{C}[z]$. Найдите все его подпредставления. **в)** Тот же вопрос для представления той же алгебры Ли в пространстве полиномиальных 1-форм (т.е. выражений вида $f(z)dz$, где $f(z)$ многочлен) при помощи производной Ли.

9. Докажите, что всякая связная компактная комплексная группа Ли абелева.

10*. Существует ли компактная группа Ли G, такая, что Lie G есть алгебра Гейзенберга?

11*. **а)** Укажите какое-нибудь точное конечномерное представление алгебры Гейзенберга.
б) Докажите, что у алгебры Гейзенберга нет *неприводимых* точных конечномерных представлений,
в) зато есть неприводимые точные *бесконечномерные* представления.

12*. Докажите, что универсальная накрывающая группы $SL_2(\mathbb{R})$ не является линейной группой Ли, т.е. не имеет точных конечномерных представлений. *Указание:* если представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ комплексифицировать, то получится представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

13. Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ проста, т.е. не имеет нетривиальных идеалов.

14. Для каких n алгебра Ли $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ проста, т.е. не имеет нетривиальных идеалов?

15. Найдите (с точностью до изоморфизма) все конечномерные алгебры Ли с одномерным коммутантом.

16. **а)** Докажите, что группа Ли кватернионов с единичной нормой (по умножению) изоморфна группе SU_2 унитарных 2×2-матриц с единичным определителем. **б)** Эта группа действует на пространстве кватернионов $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ умножениями справа и слева. Докажите, что это дает (универсальное) двулистное накрытие
$SU_2 \times SU_2 \to SO_4(\mathbb{R})$.

17. **а)** Покажите, что для любого $x \in \mathfrak{g}$ оператор $\mathrm{ad}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ является дифференцированием алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (такие дифференцирования называются *внутренними*). **б)** Докажите, что внутренние дифференцирования образуют идеал в алгебре Ли $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ всех дифференцирований алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

18. Найдите факторалгебру алгебры Ли $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ по идеалу внутренних дифференцирований, если **а)** $\mathfrak{g}$– 2-мерная неабелева алгебра Ли; **б)** $\mathfrak{g}$ – 3-мерная алгебра Гейзенберга.

19. Пусть H – связная подгруппа Ли в G. Докажите, что *нормализатор* $N(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ есть подгруппа Ли в G. Найдите ее алгебру Ли.

20. Пусть $\rho : G \to GL(V)$ — линейное представление. Пусть $W \subset U \subset V$ — цепочка линейных подпространств. Докажите, что следующие подмножества суть подгруппы Ли в G. Найдите их касательные алгебры. **а)** $H := \{g \in G \mid \rho(g)U = U\}$ **б)** $H := \{g \in G \mid (\rho(g) - E)U = W\}$, где E — единичная матрица.

21. Найдите центр группы Ли обратимых матриц, сохраняющих прямую в $\mathbb{C}^n$.

22. Найдите коммутант группы Ли из предыдущей задачи.

23. Опишите все связные группы Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ с точностью до изоморфизма.

24. Пусть $V = \mathbb{C}^n$ – тавтологическое представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Докажите, что следующие представления алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ неприводимы: **а)** S^kV; **б)** Λ^kV.

26 Пусть X – нильпотентная $n \times n$-матрица ранга $n-1$, т.е. жорданов блок вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите жорданову нормальную форму оператора $\mathrm{ad}\, X : A \mapsto XA - AX$ в пространстве $n \times n$-матриц.

27 а) Докажите, что все комплексные неприводимые представления 2-мерной неабелевой алгебры Ли одномерны. **б)** Докажите, что у 2-мерной неабелевой алгебры Ли существуют неразложимые представления любой размерности.

28 Приведите пример группы Ли, коммутант которой не является подгруппой Ли.