Домашнее задание 1

1.1. а) Докажите, что группа $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ связна.

б) Опишите связные компоненты группы $\mathrm{O}_{n-1,1}$ матриц порядка n, сохраняющих симметрическую билинейную форму сигнатуры $(n-1,1)$, и найдите группу $\mathrm{O}_{n-1,1}/\mathrm{O}^0_{n-1,1}$.

1.2. а) Докажите, что экспоненциальное отображение для группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ не является сюръективным.

б) Докажите, что экспоненциальное отображение для группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ является сюръективным, но не инъективным.

1.3. Пусть D — векторное пространство дифференциальных операторов на $\mathbb{R}$ с полиномиальными коэффициентами, т.е.

$$D = \operatorname{span}\left\langle p(x)\frac{\partial}{\partial x}, q(x)\right\rangle,$$

где $p(x), q(x)$ — полиномиальные функции на $\mathbb{R}$ ($q(x)$ — это оператор умножения на данную функцию $q(x)$).

а) Проверьте, что D является алгеброй Ли относительно стандартной скобки $[A,B] = AB - BA$.

б) Покажите, что

$$\operatorname{span}\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle$$

есть подалгебра Ли в D (т.е. алгебра Ли относительно той же операции).

в) Проверьте, что эта подалгебра изоморфна $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *полупростой*, если $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

1.4. Проверьте, что следующие алгебры полупросты:

а) $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$;

б) $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$.

Решения этого задания нужно сдать в письменном виде до 15:30 (т.е. до начала лекции) 6 марта 2014 г.