

1. Гильбертово пространство состояний некоторой квантово-механической системы -  $\mathbb{C}^3$  со скалярным произведением  $\langle u | v \rangle = \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i v_i$ .

Гамильтониан системы в некотором ортонормированном базисе задается матрицей

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3i \\ 0 & -3i & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Определите уровни энергии системы.

б) Найдите среднее значение и дисперсию наблюдаемой

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ -i & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$$

в основном (наименьшем по энергии) состоянии системы

в) В момент времени  $t_0 = 0$  система находится в состоянии  $|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Вычислите вероятность обнаружить систему в ~~состоянии~~ основном состоянии в момент времени  $t$ .

2. Квантовая частица движется в одном измерении  $-\infty < x < +\infty$  в поле потенциала

$$U(x) = \begin{cases} +\infty & x < -a \text{ и } x > a \\ 0 & -a \leq x \leq a \end{cases}$$

Частица пребывает в основном состоянии.

В момент времени  $t_0$  потенциал мгновенно меняется

$$U(x) \rightarrow U'(x) = \begin{cases} +\infty & x < -2a \text{ и } x > 2a \\ 0 & -2a \leq x \leq 2a \end{cases}$$

-2- Какова вероятность обнаружить частицу сразу после изменения потенциала ( $t_0 + 0$ ) выше второго энергетического уровня нового потенциала  $V(x)$ ?

---

3. Двумерный гармонический осциллятор имеет гамильтониан

$$\hat{H} = (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hat{\mathbb{1}}) + 2(\hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \hat{\mathbb{1}}).$$

Здесь  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \hat{\mathbb{1}}$ ,  $[\hat{a}, \hat{b}] = \dots = 0$ , частоты колебаний осциллятора  $\omega_a = 1$ ,  $\omega_b = 2$ , и мы полагаем  $\hbar = 1$ .

а) Осциллятор находится в состоянии с энергией  $E = \frac{11}{2}$ . Какие значения в этом состоянии мы могли бы получить при измерении наблюдаемой

$$\hat{A} = \hat{a}^{\dagger 2} \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}^2?$$

б) Какие наблюдаемые из семейства

$$\hat{B}_{k,l} = i((\hat{a}^\dagger)^k \hat{b}^l - (\hat{b}^\dagger)^l \hat{a}^k), \quad k, l = 0, 1, 2, \dots$$

измеримы одновременно с  $\hat{H}$ , то есть сохраняются?

---

4. Одномерная квантовомеханическая система находится в состоянии, описываемом в координатном представлении волновой функцией

$$\langle x | \psi \rangle = \psi(x) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

- а) Вычислите плотность вероятности распределения импульса системы в этом состоянии.
- б) Найдите средние значения и дисперсии для координаты и импульса в состоянии  $\psi(x)$  и проверьте выполнение для этого состояния соотношения неопределенности.