ЛЕКЦИЯ 1

Краткое содержание. Теорема Брауэра в размерностях 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть $f : [-1,1] \to [-1,1]$ — непрерывная функция. Тогда существует точка $x \in [-1,1]$ такая, что $f(x) = x$ (неподвижная точка функции f).*

Теорема 1, другая формулировка. *Не существует непрерывной функции $g : [-1,1] \to \{-1,1\}$ такой, что $g(-1) = -1$, $g(1) = 1$.*

Доказательство. Докажем сначала эквивалентность формулировок. Действительно, если вторая формулировка неверна, и $g : [-1,1] \to \{-1,1\}$ — непрерывная функция, то $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} -g(x)$ — функция $[-1,1] \to [-1,1]$ без неподвижных точек. Обратно, если $f : [-1,1] \to [-1,1]$ — непрерывная функция без неподвижных точек, то $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x - f(x))/\,|x - f(x)|$ — непрерывная (поскольку знаменатель не обращается в нуль) функция с множеством значений $\{-1,1\}$.

Докажем теперь теорему во второй формулировке. Пусть указанная функция g существует. Рассмотрим множества $M_+ \stackrel{\text{def}}{=} g^{-1}(1)$ и $M_- \stackrel{\text{def}}{=} g^{-1}(-1)$. Очевидно, $M_+ \cup M_- = [-1,1]$ и оба множества непусты: $1 \in M_+$ и $-1 \in M_-$.

Рассмотрим теперь число $a = \sup M_-$. Поскольку функция g непрерывна, множество M_+ открыто: для каждой точки $b \in M_+$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что $(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \cap [-1,1] \subset M_+$. Отсюда вытекает, что $a \notin M_+$ и, в частности, $a < 1$. Следовательно $a \in M_-$. Но M_- тоже открыто (в силу той же непрерывности), то есть существует такое $\varepsilon > 0$, что $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap [-1,1] \subset M_-$. Поскольку $a < 1$, множество $L = (a, a+\varepsilon) \cap [-1,1]$ непусто. Всякий его элемент $c \in L$ принадлежит M_- и больше a, что противоречит определению a как точной верхней грани. $\square$

Если заменить в теореме 1 отрезок $[-1,1]$ любым другим отрезком или, скажем, дугой окружности, то теорема останется верной. Действительно, пусть T — отрезок или дуга. Тогда существует непрерывное взаимно однозначное отображение $\varphi : [-1,1] \to T$ такое, что обратное отображение φ^{-1} (оно существует, т.к. φ взаимно однозначно) также непрерывно (такие отображения называются *гомеоморфизмами*). Если $f : T \to T$ — непрерывное отображение, то отображение $F \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi : [-1,1] \to [-1,1]$ также непрерывно. Согласно теореме, существует $x \in [-1,1]$ такое, что $x = F(x) = \varphi^{-1}(f(\varphi(x)))$. Применяя отображение φ к обеим частям равенства, получим $\varphi(x) = f(\varphi(x))$, то есть точка $\varphi(x)$ является неподвижной для отображения f. С другой стороны, если T — прямая или окружность, то существует непрерывное отображение $f : T \to T$ без неподвижных точек: в случае прямой это параллельный перенос $f(x) = x + 1$, в случае окружности — поворот. Следовательно, не существует гомеоморфизма $\varphi : [-1,1] \to T$, где T — прямая или окружность.

Пример 1. Теорему 1 часто иллюстрируют таким образом: рассмотрим железнодорожную платформу, которая движется по рельсам вперед-назад. На платформе укреплен стержень, соединенный с платформой шарниром. Стержень тяжелый; если он в какой-то момент упадет на платформу (направо или налево), то останется лежать. Тогда из теоремы вытекает, что как бы ни двигалась платформа (вперед, назад, с любыми ускорениями, может стоять часть времени, и т.п.), найдется начальное положение стержня, при котором он в течение всего путешествия не упадет. Действительно, множество всех положений стержня образует полуокружность. При любом сценарии движения положение стержня в конце путешествия зависит от его начального положения непрерывным образом. Если указанного начального положения x не найдется, то мы построили непрерывное отображение полуокружности в себя, образом которого является пара концов полуокружности, причем каждый конец переходит в себя (если стержень в начальный момент времени лежал, то он так и останется лежать). Это противоречит второй формулировке теоремы 1 и тому факту, что существует гомеоморфизм отрезка и полуокружности, переводящий концы отрезка в концы полуокружности.

Двумерным аналогом теоремы 1 является

Теорема 2. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — круг единичного радиуса с центром в начале координат, и $f : D \to D$ — непрерывное отображение. Тогда существует точка $x \in D$ такая, что $f(x) = x$ (неподвижная точка отображения f).*

Теорема 2, другая формулировка. *Пусть $\omega \subset D$ — граничная окружность круга D. Тогда не существует непрерывного отображения $g : D \to \omega$ такого, что $g(x) = x$ при всех $x \in \omega$.*

Пример 2. Рассмотрим корабль, который плавает по океану. На корабле размещен тяжелый стержень, прикрепленный к палубе шарниром, который поворачивается в любую сторону. Если стержень падает на палубу, то в дальнейшем он не меняет положения (приклеивается к палубе). Тогда из теоремы вытекает, что как бы ни двигался корабль, найдется начальное положение стержня, при котором он не упадет. Действительно, множество возможных положений стержня образует полусферу. Существует (постройте!) гомеоморфизм полусферы и круга D, переводящий границу полусферы в граничную окружность ω. Положение стержня в конце путешествия зависит от его начального положения непрерывным образом, поэтому если указанного начального положения не найдется, то эта непрерывная зависимость будет контрпримером к второй формулировке теоремы 2.

Доказательство эквивалентности двух формулировок аналогично одномерному случаю и оставляется читателю в качестве упражнения. Мы теперь выведем вторую формулировку теоремы из некоторой технической леммы, а саму лемму докажем позднее.

Лемма 1. *Всякому непрерывному отображению $f : \omega \to \omega$ (т.е. из окружности в окружность) можно сопоставить целое число $\deg f \in \mathbb{Z}$, называемое его степенью, так чтобы это соответствие обладало следующими свойствами:*

1) *Если f — отображение в точку, то $\deg f = 0$.*
2) *Если f — тождественное отображение, то $\deg f = 1$.*
3) *Если $f_t : \omega \to \omega$ — семейство непрерывных отображений, непрерывно зависящих от параметра $0 \le t \le 1$, то степень $\deg f_t$ для всех t одна и та же.*

Вывод теоремы 2 из леммы 1. Пусть $g : D \to \omega$ — отображение, о котором идет речь во второй формулировке теоремы, и $\mu_t : \omega \to D$ — отображение, заданное формулой $\mu_t(x, y) = (tx, ty)$; здесь $0 \le t \le 1$. Отображения $g_t \stackrel{\text{def}}{=} g \circ \mu_t : \omega \to \omega$ образуют семейство, непрерывно зависящее от параметра t, откуда степень $\deg g_t$ постоянна. Но μ_0 переводит всю окружность в точку $(0, 0)$ (центр круга D), так что g_0 — отображение в точку, и $\deg g_0 = 0$. С другой стороны, μ_1 — тождественное отображение, $g_1 = g|_\omega$ по условию — тоже тождественное, так что $\deg g_1 = 1$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Для доказательства леммы заметим прежде всего, что непрерывное отображение $f : \omega \to \omega$ можно рассматривать как отображение $f : [0, 1] \to \omega$, в котором $f(0) = f(1)$. Теперь обобщим лемму 1, отказавшись от условия условия $f(0) = f(1)$ и от того, что $\deg f$ — целое число. Для этого реализуем окружность ω как единичную окружность с центром в начале координат: $\omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, и рассмотрим отображение $p : \mathbb{R} \to \omega$, заданное формулами $p(t) = (\cos t, \sin t)$. Очевидно, p — сюръекция: у каждой точки $a \in \omega$ существует прообраз. Более того, поскольку функции cos и sin периодичны с минимальным периодом 2π, этих прообразов бесконечно много; их множество $p^{-1}(a) \subset \mathbb{R}$ представляет собой арифметическую прогрессию с шагом 2π.

Лемма 2 (обобщение леммы 1)**.** *Для всякого непрерывного отображения $f : [0, 1] \to \omega$ и произвольной точки $x_* \in p^{-1}(f(0))$ существует и единственна функция $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ такая, что $F(0) = x_*$ и $p(F(t)) = f(t)$ для всех $t \in [0, 1]$.*

Функцию F называют поднятием отображения f с начальной точкой x_*. Неформально говоря, $F(x)$ это количество оборотов (не обязательно целое, может быть любым действительным числом, в т.ч. отрицательным), которое точка $f(s) \in \omega$ сделала вокруг центра окружности ω, пока точка s пробегала отрезок $[0, x] \subset [0, 1]$. Из леммы 2 вытекает, в частности, что если $x'_* \in p^{-1}(f(0))$ — произвольная точка, то разность $x'_* - x_* = 2\pi k$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$, и поднятие F' отображения f с начальной точкой x'_* задается формулой $F'(x) = F(x) + 2\pi k$. Действительно, такое отображение является таким поднятием, а согласно лемме 2 поднятие с данной начальной точкой единственно.

Рассмотрим теперь семейство отображений $f_t : [0, 1] \to \omega$, непрерывно зависящих от параметра t, и зафиксируем точку $x_* \in p^{-1}(f_0(0))$. Согласно лемме 2, существует и единственна непрерывная функция $x_*(t)$ такая, что $x_*(0) = x_*$ и $p(x_*(t)) = f_t(0)$. Пусть теперь $F_t : [0, 1] \to \mathbb{R}$ — поднятие отображения f_t с начальной точкой $x_*(t)$. Тогда имеет место такое уточнение (или продолжение) леммы 2:

Лемма 3 (продолжение леммы 2)**.** *Семейство функций $F_t : [0, 1] \to \mathbb{R}$ зависит от параметра t непрерывно.*

Из лемм 2 и 3 немедленно вытекает лемма 1 (и, следовательно, наш главный результат — теорема 2):

Вывод леммы 1 из лемм 2 и 3. Пусть $f : [0, 1] \to \omega$ — непрерывное отображение, для которого $f(0) = f(1)$ (то есть непрерывное отображение из окружности в окружность). Выберем произвольную точку $x_* \in p^{-1}(f(0))$ (она существует, т.к. p — сюръекция), и пусть $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ — поднятие отображения f с начальной точкой x_*. Положим по определению $\deg(f) = (F(1) - F(0))/(2\pi)$; корректность определения вытекает из того, что при смене начальной точки к поднятию F прибавляется константа (равная $2\pi k$). так что $\deg(f)$ не меняется. Кроме того, поскольку $f(0) = f(1)$, точки $F(0)$ и $F(1)$ принадлежат одной и той же арифметической прогрессии $p^{-1}(f(0)) = p^{-1}(f(1))$, откуда вытекает, что $\deg(f) \in \mathbb{Z}$.

Проверим теперь свойства 1–**??**. Если $f = const.$ (отображение в точку), то $F = const.$; отсюда вытекает свойство 1. Если $f : \omega \to \omega$ — тождественное отображение, то, рассмотренное как отображение $[0,1] \to \omega$, оно задается формулами $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Отсюда $F(t) = t$ и $\deg(f) = 1$ (свойство 2). Свойство 3 вытекает из леммы 3: поскольку F_t зависит от t непрерывно, непрерывно зависит от t и число $\deg(f_t) = (F_t(1) - F_t(0))/(2\pi)$. Поскольку при каждом t это число — целое, непрерывная зависимость означает, что число постоянно. □

Доказательство лемм 2 и 3. Реализуем ω как подмножество плоскости — единичную окружность с центром в начале координат. Отображение $f : [0,1] \to \omega$ (и, следовательно, отображение из окружности в окружность) непрерывно, если оно непрерывно как отображение отрезка в плоскость (т.е. как пара отображений из отрезка в прямую, то есть как пара функций на отрезке).

Рассмотрим теперь непрерывное отображение $f : [0,1] \to \omega$; как известно из курса анализа, оно равномерно непрерывно (поскольку это отображение из отрезка в плоскость). Тем самым существует $\delta > 0$ такое, что если $a, b \in [0,1]$ и $|a - b| < \delta$, то расстояние между точками $f(a)$ и $f(b)$ меньше $1/10$ диаметра окружности ω. Пусть $x \in [0,1]$; поставим на отрезке $[0,1]$ точки $a_1 = 0 < a_2 < \dots < a_{N-1} < a_N = x$ так, чтобы $a_{i+1} - a_i < \delta$ при всех i, и положим $F_{a_1,\dots,a_N}(x) = x_* + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N-1} \varrho(f(a_i), f(a_{i+1}))$; здесь по определению $\varrho(a,b)$ — длина кратчайшей дуги между точками a и b, взятая со знаком $+$, если эта дуга идет против часовой стрелки, и со знаком $-$ в противном случае. Поскольку точки $f(a_i)$ и $f(a_{i+1})$ не могут быть, в силу равномерной непрерывности, диаметрально противоположными, кратчайшая дуга единственна и вспомогательная величина $F_{a_1,\dots,a_N}(x)$ корректно определена.

Заметим теперь, что если между a_i и a_{i+1} вставить еще одну точку, a', то значение $F(x)$ не изменится: $F_{a_1,\dots,a_i,a',a_{i+1},\dots,a_N}(x) = F_{a_1,\dots,a_N}(x) + \varrho(f(a_i), f(a')) + \varrho(f(a'), f(a_{i+1})) - \varrho(f(a_i), f(a_{i+1}))$; но поскольку расстояние между точками $f(a_i)$, $f(a')$ и $f(a_{i+1})$ не превосходит $1/10$ диаметра окружности, все эти три точки лежат в пределах одной полуокружности. Отсюда вытекает (проверьте!), что сумма трех последних членов в формуле равна нулю.

Рассмотрим две последовательности, $a_1 < \dots < a_N \in [0,x]$ и $b_1, \dots, b_M \in [0,x]$, для которых $a_{i+1}) - a_i < \delta$ и $b_{i+1} - b_i < \delta$ при всех i. Добавляя точки $b_1, \dots, b_M$ по одной к точкам $a_1, \dots, a_N$, получим последовательность $c_1, \dots, c_{M+N}$. Согласно предыдущему утверждению, $F_{a_1,\dots,a_N}(x) = F_{c_1,\dots,c_{M+N}}(x) = F_{b_1,\dots,b_M}(x)$. Следовательно, величина $F_{a_1,\dots,a_N}(x)$ не зависит от точек $a_1, \dots, a_N$, а только от x (и отображения f); мы будем ее обозначать $F(x)$.

Индукцией легко доказать (проделайте!), что при любом $s = 0, \dots, N$ имеет место равенство $p(F_{a_1,\dots,a_s}(a_s)) = f(a_s)$. Отсюда вытекаает, что $F(x)$ — поднятие f (т.е. $p(F(x)) = f(x)$). Пусть теперь F' — другое поднятие с той же начальной точкой x_*. Рассмотрим множество $A = \{t \in [0,1] \mid F(t) = F'(t)\}$. Оно непусто (поскольку содержит 0) и замкнуто (поскольку F и F' — непрерывные функции). Но в то же время оно открыто: при всех t имеет место равенство $p(F(t)) = f(t) = p(F'(t))$. Пусть теперь $\delta > 0$ таково, что при $|t - t'| < \delta$ имеют место неравенства $|F(t') - F(t)| < 1$, $|F'(t') - F'(t)| < 1$. Тогда $|F'(t') - F(t')| < 2 < \pi$, что в сочетании с равенством $p(F(t')) = f(t') = p(F'(t'))$ означает $F(t') = F'(t')$. Следовательно, множество A также и открыто (если $t \in A$ и $|t - t'| < \delta$, то $t' \in A$). Как мы уже видели при доказательстве теоремы Брауэра для размерности 1, отсюда вытекает, что $A = [0,1]$ — поднятие единственно.

Для доказательства последнего свойства поднятия (непрерывности семейства F_t) заметим, что семейство отображений $f_t : [0,1] \to \omega$, где $t \in [0,1]$, это непрерывное отображение $f : [0,1] \times [0,1] \to \omega$, а семейство F_t это поднятие этого отображения. Все приведенные выше рассуждения легко переносятся с отрезка ω на квадрат $[0,1] \times [0,1]$ (в частности, непрерывное отображение квадрата в плоскость равномерно непрерывно), откуда и получается, что поднятие существует и единственно — в силу этой единственности оно совпадает с семейством F_t, которое тем самым зависит от t непрерывно. □