1. ОТОБРАЖЕНИЯ ИЗ ОКРУЖНОСТИ В ОКРУЖНОСТЬ.

Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^2$ — единичная окружность с центром в начале координат. Отображение $f : \omega \to \omega$ можно интерпретировать как отображение $f : [0,1] \to \omega$, для которого $f(0) = f(1)$. Напомним, что поднятием непрерывного отображения f называется непрерывное отображение $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ такое, что $p \circ F = f$, где $p : \mathbb{R} \to \omega$ задано формулой $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Любое непрерывное отображение имеет поднятие; если F_1, F_2 — два поднятия отображения f, то $F_2(t) = F_1(t) + k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Степенью отображения f называется целое число $\deg f = F(1) - F(0)$, где F — произвольное поднятие f. Если имеется семейство непрерывных отображений $f_t : [0,1] \to \omega$, $f_t(0) = f_t(1)$, непрерывно зависящее от параметра $t \in [0,1]$, то степень $\deg f_t$ постоянна.

Задача 1. Найдите степень отображения $f : \omega \to \omega$, заданного формулой $f(\varphi) = n\varphi$; здесь φ — центральный угол точки $(x,y) \in \omega$ и $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. Найдите степень отображения из $f : \omega \to \omega$, заданного формулой $f(x,y) = A(x,y)/|A(x,y)|$ при а) $A(x,y) = (x,-y)$, б) $A(x,y) = (y,x)$, в) $A(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, г) $A(x,y) = (\mathrm{Re}((x+iy)^n), \mathrm{Im}((x+iy)^n))$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. Докажите, что если степень отображения $f : \omega \to \omega$ отлична от нуля, то $f(\omega) = \omega$; обратное утверждение неверно.

Задача 4. Докажите, что если $\deg f_0 = \deg f_1$, то существует семейство непрерывных отображений f_t, $0 \le t \le 1$, непрерывно зависящее от параметра t и соединяющее f_0 с f_1.

Основная теорема алгебры утверждает, что всякий комплексный многочлен $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ $(n > 0)$ имеет комплексный корень. Докажем ее от противного. Пусть $R \ge 0$; определим отображение $f_R : \omega \to \omega$ формулой $f_R(x,y) = P(R(x+iy))/|P(R(x+iy))|$. Если основная теорема алгебры неверна для многочлена P, то f_R определено для любого $R \ge 0$.

Задача 5 (основная теорема алгебры)**.** а) Докажите, что $\deg f_0 = 0$. б) Докажите, что если R достаточно велико, то существует семейство отображений $g_t : \omega \to \omega$, $0 \le t \le 1$, непрерывно зависящее от t и такое, что $g_0 = f_R$, а g_1 — отображение из задачи 2г. в) Приведите результаты задач 5а, 5б и 2г к противоречию, доказав тем самым основную теорему алгебры.

Пусть $u, v : [0,1] \to [0,1]^2$ — два непрерывных отображения (непрерывные кривые), причем $u(0) = (0,0)$, $u(1) = (1,1)$, $v(0) = (0,1)$, $v(1) = (1,0)$. Докажем, что кривые u и v пересекаются — существуют $t, s \in [0,1]$ такие, что $u(t) = v(s)$. Предположим, что это не так, и определим отображение $F : [0,1] \to \omega$ формулой $F(t,s) = (u(t) - v(s))/|u(t) - v(s)|$. Пусть $\mu_R : \omega \to [0,1]^2$ — непрерывное отображение, взаимно однозначно переводящее окружность в квадрат со стороной R, центром в центре квадрата $[0,1]$ и сторонами, параллельными осям координат. Рассмотрим отображение $f_R = F \circ \mu_R ; \omega \to \omega$.

Задача 6. а) Докажите, что $\deg f_0 = 0$. б) Докажите, что существует семейство непрерывных отображений $g_t : \omega \to \omega$, $0 \le t \le 1$, непрерывно зависящее от параметра t и такое, что $g_0 = f_1$, а g_1 — тождественное отображение. в) Приведите результаты задач 6а и 6в к противоречию, доказав тем самым, что кривые u и v пересекаются. г) Из города A в город B ведут две дороги. Две повозки, связанные веревкой длиной 10 м, смогли проехать из A в B, одна по первой дороге, другая по второй. Докажите, что два круглых воза диаметром 10 м, одновременно выехавшие из A и из B навстречу друг другу по двум разным дорогам, разъехаться не смогут.