

Рассмотрим связность в расслоении $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$, заданную условием $dz + f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy = 0$.

Задача 1. Найдите кривизну этой связности.

Задача 2. При каком условии на функции f и g параллельный перенос вдоль любой гладкой кривой в \mathbb{R}^2 будет линейным отображением слоев?

Задача 3. Рассмотрим отображение $\pi: S^1 \times \mathbb{C} \rightarrow S^3 \subset \mathbb{C}^2$, заданное формулой $(\varphi, w) \mapsto e^{i\varphi}(w, 1)/\sqrt{1 + |w|^2}$. Покажите, что это отображение является диффеоморфизмом на свой образ, причем слои тривиального расслоения $S^1 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ переходят в слои расслоения Хопфа. Определим связность в расслоении Хопфа площадками, ортогональными (в стандартной римановой метрике) слоям расслоения Хопфа. Индуцируем эту связность с помощью отображения π , получим связность в тривиальном расслоении $S^1 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Найдите эту связность явно, ее кривизну. Верно ли, что параллельные переносы есть повороты окружности?

Задача 4. Рассмотрим векторное расслоение $p: E \rightarrow M$, пусть ∇ ковариантное дифференцирование на E .

а) Докажите, что для любой точки $y \in E$ найдется сечение s расслоения E , такое что $s(p(y)) = y$ и $\nabla s(p(y)) = 0$.

б) Докажите, что касательное пространство в точке y к такому сечению не зависит от выбора s .