2. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА.

Задача 1. Ниже перечислены несколько топологических пространств. Для каждого из них докажите, что это действительно топологическое пространство, и определите, является ли оно хаусдорфовым, связным, линейно связным, компактным. Докажите, что эти пространства попарно не гомеоморфны. а) $\mathbb{R}$; б) $[0,1)$; в) $\mathbb{R}^2$; г) $\mathbb{R}^2 \setminus \{a_1,\dots,a_n\}$ ($a_1,\dots,a_n$ — попарно различные точки, $n \geq 1$); д) $\{(x_0,\dots,x_n,\dots) \mid \forall n\ |x_n| \leq 1\}$; метрика определяется $\varrho_\infty(x,y) = \sup_n |x_n - y_n|$; е) $\mathbb{C}$ с топологией Зарисского: множество $A \subset \mathbb{C}$ замкнуто, если оно совпадает с $\mathbb{C}$ или конечно; ж) $\mathbb{C}^2$ с топологией Зарисского: множество $A \subset \mathbb{C}^2$ замкнуто, если оно является множеством решений конечной системы полиномиальных уравнений.

Задача 2. Сколько существует попарно не гомеоморфных топологических пространств, состоящих из трех точек? Сколько среди них хаусдорфовых? Связных? Линейно связных?

Задача 3. Пусть $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Множество $U \subset \overline{\mathbb{N}}$ назовем открытым, если либо $\infty \notin U$, либо $\overline{\mathbb{N}} \setminus U$ конечно. а) Докажите, что таким образом определена топология. б) Является ли пространство $\overline{\mathbb{N}}$ компактным? Опишите его связные подмножества. в) Что такое непрерывное отображение $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{N}}$ и $\overline{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$? г) Существует ли подмножество $A \subset \mathbb{R}$, гомеоморфное $\overline{\mathbb{N}}$?

Задача 4. а) Докажите, что объединение пересекающихся связных пространств связно. б) Тот же вопрос про линейно связные пространства. в) Докажите, что образ связного пространства при непрерывном отображении связен. г) Тот же вопрос про линейно связные пространства. д) Докажите, что прямое произведение двух связных пространств связно. е) Тот же вопрос про линейно связные пространства.

Задача 5. Постройте гомеоморфизм а) окружности и окружности, у которой попарно отождествлены противоположные точки; б) пространства прямых на плоскости, проходящих через начало координат (уточните топологию в этом пространстве!) и окружности; в) пространства пар точек на прямой, в котором пары (x,y) и (y,x) для всех $x,y \in \mathbb{R}$ отождествляются (возможно $x=y$!), и полуплоскости с границей; г) двумерной сферы и плоскости, к которой добавлена новая точка ∞, база окрестностей которой состоит из всех множеств $\Omega_R \stackrel{\text{def}}{=} \{\infty\} \cup \{(x,y) \mid x^2+y^2 > R\}$, $R>0$; д) проективной плоскости — пространства $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, в котором отождествлены точки $(x,y,z) \sim (tx,ty,tz)$ при всех $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ и всех $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — и круга $\{(p,q) \mid p^2+q^2 \leq 1\}$, в котором отождествлены диаметрально противоположные точки границы: $(p,q) \sim (-p,-q)$ при всех p,q таких, что $p^2+q^2=1$, а также квадрата $[-1,1]\times[-1,1]$, в котором противоположные стороны склеены “с перекруткой”: $(-1,x) \sim (1,-x)$, $(x,-1) \sim (-x,1)$ для всех $-1 \leq x \leq 1$; е) пространства всех прямых на плоскости (уточните топологию!) и ленты Мебиуса — квадрата $[-1,1]\times(-1,1)$, в котором отождествлены точки $(1,x)$ и $(-1,-x)$ для всех $-1 < x < 1$.

Задача 6. а) Докажите, что S^n без одной точки гомеоморфно $\mathbb{R}^n$. б) Докажите, что *надстройка* над S^n, т.е. произведение $S^n \times [0,1]$, в котором склеены все точки $(x,0)$ и все точки $(x,1)$ при $x \in S^n$, гомеоморфна S^{n+1}. в) Докажите, что множество пар (z,w) комплексных чисел, удовлетворяющих равенству $|z|^2+|w|^2=1$, гомеоморфно S^3. г) Докажите, что подмножество $X \subset S^3$, состоящее из пар (z,w), для которых $|z| \leq |w|$, гомеоморфно произведению окружности на двумерный круг (полноторию), а подмножество, состоящее из пар, где $|z|=|w|$, гомеоморфно двумерному тору $S^1 \times S^1$. д) Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ — стандартное полноторие (бублик вместе с внутренностью). Докажите, что $\mathbb{R}^3 \setminus K$ гомеоморфно полноторию без точки. е) Докажите, что множество точек $[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{C}P^2$, однородные координаты которых удовлетворяют уравнению $x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$, гомеоморфно проективной прямой $\mathbb{C}P^1$, т.е. (согласно задаче **??**) сфере S^2. ж) Докажите, что множество точек $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{C}P^3$, для которых $x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$, гомеоморфно произведению $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$. з) Докажите, что множество неупорядоченных пар комплексных чисел гомеоморфно $\mathbb{C}^2$. и) Докажите, что множество неупорядоченных пар точек на $\mathbb{C}P^1$ гомеоморфно проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$.