Домашнее задание 2

Пусть $V = \mathbb{C}[x, y]$ — пространство многочленов от двух переменных, и пусть $V_n \subset V$ — подпространство однородных многочленов степени n, где $n \geq 0$. Определим представление $R\colon \operatorname{SL}_2(\mathbb{C}) \to \operatorname{End}(V)$ следующим образом:

$$R\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) P(x, y) = P(ax + cy, bx + dy).$$

Очевидно, подпространство V_n является подпредставлением в V, причем $\dim V_n = n + 1$.

2.1. Рассмотрим подгруппу (максимальный тор)

$$T = \left\{\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}\right\} \subset \operatorname{SL}_2(\mathbb{C}).$$

Разложите V_n в сумму неприводимых представлений группы T.

Указание. Все представления абелевой группы одномерны.

Рассмотрим следующие элементы в алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2 = \{X \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}$:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что эти элементы образуют базис алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$.

2.2. а) Найдите коммутационные соотношения между этими элементами (=вычислите $[E, F]$, $[H, E]$ и $[H, F]$).

б) Пусть $t \in \mathbb{C}$. Вычислите $\exp tE$, $\exp tF$ и $\exp tH$.

2.3. Опишите действие элементов алгебры Ли $dR(E)$, $dR(F)$ $dR(H)$ в пространстве V_n либо явным образом (может быть полезно рассмотреть стандартный базис $x^n, x^{n-1}y, \ldots, y^n$ пространства V_n), либо при помощи дифференциальных операторов первого порядка, действующих на однородных многочленах от переменных x, y.

Указание. Используйте предыдущее упражнение и следующий факт: если $f\colon G \to H$ — гомоморфизм групп Ли, а $df\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ — его дифференциал, то для всякого $X \in \mathfrak{g}$

$$df(X) = \frac{d}{dt} f(\exp tX)|_{t=0}.$$

2.4. Покажите, что при любом $n \geq 0$ пространство V_n является неприводимым представлением группы Ли $\operatorname{SL}_2(\mathbb{C})$ (или, что то же самое, алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$).

В лекции от 13 марта (будет) показано, что всякое неприводимое представление группы $\operatorname{SL}_2(\mathbb{C})$ изоморфно V_n при некотором $n \geq 0$.

Решения этого задания нужно сдать в письменном виде до 15:30 (т.е. до начала лекции) 20 марта 2014 г.