Задачи по группам и алгебрам Ли – 3

В этом листке V_n – неприводимое представление группы Ли $SL_2(\mathbb{C})$ размерности $n+1$.

1. Разложите представление $V_n \otimes V_m$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ в прямую сумму неприводимых. *Указание:* выпишите характер этого представления.

2. Найдите кратность тривиального представления $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ в представлении $V_1^{\otimes n}$.

3. Для каких n представление V_n допускает невырожденную инвариантную **а)** симметрическую билинейную форму; **б)** кососимметрическую билинейную форму? Постройте эту форму. *Указание:* инвариантная
билинейная форма есть инвариантный элемент в $V_n^* \otimes V_n^*$.

4. Докажите, что группа $SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$ сохраняет невырожденную симметрическую билинейную форму на пространстве $V_1 \otimes V_1$.

5. Пользуясь предыдущей задачей, постройте двулистное накрытие $SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \to SO_4(\mathbb{C})$.

6. Какие из 3-мерных комплексных алгебр Ли **а)** разрешимы; **б)** нильпотентны?

7. Докажите, что всякая разрешимая алгебра Ли есть полупрямая сумма одномерной алгебры Ли и (разрешимого) идеала.
Указание: таким идеалом может быть любое подпространство, содержащее коммутант.

8. Докажите, что всякая односвязная разрешимая группа Ли есть полупрямое произведение аддитивной группы $\mathbb{R}$ на (разрешимую) нормальную подгруппу Ли.
Указание: воспользуйтесь предыдущей задачей.

9. Докажите, что односвязная разрешимая группа Ли стягиваема.
Указание: можно вести индукцию по размерности, пользуясь предыдущей задачей.

10. Пользуясь теоремой Ли для присоединенного представления, докажите, что коммутант разрешимой алгебры Ли нильпотентен.

11. Опишите все неприводимые вещественные представления группы Ли **а)** SU_2; **б)** $SO_3(\mathbb{R})$.

12. Найдите замыкание Мальцева 1-мерной подалгебры Ли в $\mathfrak{su}_n$, порожденной элементом $x \in \mathfrak{su}_n$ в зависимости от собственных значений x.

13*. Конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ допускает невырожденное, как линейный оператор, дифференцирование D. Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна.

14. Покажите, что всякое дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{g}$ единственным образом продолжается до дифференцирования универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$.

15 Покажите, что в любом неприводимом комплексном представлении алгебры Ли $\mathfrak{g}$ все элементы центра
универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ действуют скалярными операторами. *Указание:* вспомните лемму Шура.

16 Докажите, что алгебра дифференциальных операторов на связной группе Ли G, инвариантных
относительно левого и правого действий группы G, изоморфна центру соответствующей универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$.

17 а) Докажите, что любой элемент алгебры $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации элементов $e^i h^j C^k$ или $f^i h^j C^k$, где i, j, k – целые неотрицательные числа. **б)** Докажите, что центр алгебры $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ порожден элементом C.

18 Согласно задаче 2, элемент Казимира $C \in U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ действует скаляром в каждом неприводимом представлении алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Найдите этот скаляр для неприводимого $n+1$-мерного представления V_n.

19 Найдите центр универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$, если **а)** $\mathfrak{g}$ – 2-мерная неабелева алгебра Ли; **б)** $\mathfrak{g}$ – 3-мерная алгебра Гейзенберга.

20 Вычислите когомологии алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

21. Докажите, что представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве своих когомологий тривиально.
22***.** Покажите, что центральные расширения алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с помощью $\mathfrak{g}$-модуля V классифицируются элементами $H^2(\mathfrak{g}, V)$.

23***.** Докажите (не используя обращение в нуль π_2), что $H^2(G, \mathbb{C}) = 0$ для односвязной компактной группы Ли G.

24. Пусть t_1, t_2 два элемента максимального тора T компактной группы Ли K, которые сопряжены с помощью элемента g. Покажите, что их можно сопрячь с помощью элемента $n \in N_K(T)$.
25. Что можно сказать сопрягающем элементе g из предыдущей задачи, если t_1 — регулярный (то есть принадлежит единственному максимальному тору).
26. Найдите корневые разложения (т.е. разложение $\mathrm{Ad}K|_T : \mathfrak{k}$ на неприводимые) и группы $n \in N_K(T)/T$ для следующих компактных групп: а) $SU(n)$ б) $SO(n, \mathbb{R})$.