ЛЕКЦИЯ 3

Краткое содержание. Связность, линейная связность, компактность.

Топологическое пространство X называется связным, если в нем имеется только два подмножества одновременно открытых и замкнутых — пустое множество и само X.

Пример 1. Отрезок $[0,1]$ — связное множество. Доказательство см. в лекции 1.

Топологическое пространство X называется линейно связным, если для любых точек $a, b \in X$ существует соединяющий их путь, то есть непрерывное отображение $\gamma : [0,1] \to X$ такое, что $\gamma(0) = a$ и $\gamma(1) = b$.

Теорема 1. *1) Линейно связное топологическое пространство связно.*
2) Образ связного топологического пространства при непрерывном отображении связен.
3) Образ линейно связного топологического пространства при непрерывном отображении линейно связен.

Доказательство. 1. Пусть X линейно связно, но не связно: $X = U \cup V$, где U и V открыты, непусты и не пересекаются. Пусть $a \in U$, $b \in V$; соединим a и b непрерывным путем f. Тогда множества $f^{-1}(U) \subset [0,1]$ и $f^{-1}(V) \subset [0,1]$ открыты (поскольку f непрерывно), непусты (поскольку первое содержит 0, а второе 1), не пересекаются (поскольку U и V не пересекаются), и их объединение есть $[0,1]$ (поскольку $U \cup V = X$). Это противоречит связности отрезка $[0,1]$.

2. Пусть $f : X \to Y$ непрерывно, X связно, а $f(X) \subset Y$ нет. По определению топологии в подмножестве это означает, что найдутся два открытых подмножества $U, V \subset Y$ такие, что $f(X) \subset U \cup V$ и $f(X) \cap U \neq \varnothing \neq f(X) \cap V$, но $f(X) \cap U \cap V = \varnothing$. Рассмотрим множества $A = f^{-1}(U) \subset X$ и $B = f^{-1}(V) \subset X$; тогда из сформулированных выше утверждений вытекает, что $A \cup B = X$, $A \neq \varnothing \neq B$ и $A \cap B = \varnothing$. Поскольку f непрерывно, A и B открыты, что противоречит связности X.

3. Точки $a = f(p) \in f(X)$ и $b = f(q) \in f(X)$, где $p, q \in X$, можно соединить путем $f \circ \gamma$, где $\gamma : [0,1] \to X$ — путь, соединяющий точки p и q. □

Пример 2. Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ — окружность единичного радиуса с центром в начале координат, а $B = f([0,+\infty))$, где $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\frac{t}{1+t}\cos t, \frac{t}{1+t}\sin t)$. Докажем, что пространство $C = A \cup B$ связно. Действительно, A и B линейно связны (для A это проверяется непосредственно, а для B следует из утверждения 3 теоремы 1) и, следовательно, связны (по утверждению 1 той же теоремы). Поэтому если $C = U \cup V$, где U и V открыты, непусты и не пересекаются, то либо $A \cap U$, либо $A \cap V$ пусто — для определенности, второе, так что $A \subset U$. Аналогично $B \subset V$ ($B \subset U$ невозможно, т.к. тогда V пусто). Пусть $a \in A$; из открытости U следует, что существует круг с центром a, лежащий в U. Но такой круг пересекается с B и, следовательно, с V, что невозможно.

В то же время пространство C не является линейно связным. Пусть $a \in A$, $b \in B$, и $\gamma : [0,1] \to C$ — путь, связывающий эти точки. Поскольку $B = C \cap \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — открытый круг радиуса 1 с центром в начале координат, множество $B \subset C$ открыто. Следовательно, существует полуинтервал $(T,1] \subset \gamma^{-1}(B)$ такой, что $\gamma(T) \in A$. Отображение $f : [0,+\infty) \to B$ является гомеоморфизмом, так что можно рассмотреть непрерывное отображение $f^{-1} \circ \gamma : (T,1] \to [0,+\infty)$. Поскольку f непрерывно и $\gamma(T) = A$, имеем $|\gamma(t)| \to 1$ при $t \to T+0$. Отсюда $f^{-1}(\gamma(t)) \to +\infty$ при $t \to T+0$. Отсюда вытекает, что $f(f^{-1}(\gamma(t)))$ не имеет предела при $t \to T+0$. Но с другой стороны $f(f^{-1}(\gamma(t))) = \gamma(t) \to a$ при $t \to T$ — полученное противоречие доказывает, что C линейно не связно.

Топологическое пространство X называется компактным, если для любого набора его открытых подмножеств U_α, $\alpha \in A$ таких, что $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$, найдется конечный набор индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ такой, что $U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N} = X$.

Теорема 2. *1) Образ компактного пространства (компакта) при непрерывном отображении компактен.*
2) Декартово произведение двух компактных пространств компактно.
3) Компактное подмножество хаусдорфова (в частности, метрического) пространства замкнуто.
4) Замкнутое подмножество компакта — компакт.
5) Компактное подмножество метрического пространства ограничено.
6) Подмножество $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.

Доказательство. 1. Пусть $f : X \to Y$ непрерывно, X компактен. Пусть $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in A$ — множество открытых подмножеств Y, причем $f(X) = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \cap f(X)$, то есть $f(X) \subset \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Все множества $V_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(U_\alpha)$ открыты, и $X = \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$, откуда следует, что найдутся индексы $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ такие, что $V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_N} = X$, откуда $U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N} = f(X)$, и $f(X)$ компактно.

2. Пусть $X_1 \times X_2 = \bigcup_\alpha U_\alpha$, где X_1, X_2 компактны, а все $U_\alpha \subset X_1 \times X_2$ открыты. Для α и $a \in U_\alpha$ пусть $P_{a,\alpha} \subset X_1$ и $Q_{a,\alpha} \subset X_2$ — открытые множества такие, что $a \in P_{a,\alpha} \times Q_{a,\alpha} \subset U$. Тогда $X_1 \times X_2 = \bigcup_\alpha \bigcup_{a\in U_\alpha} P_{a,\alpha} \times Q_{a,\alpha}$. Для произвольного $x \in X_1$ множество $\{x\} \times X_2$ гомеоморфно X_2 и, следовательно, компактно. Тогда найдется конечный набор индексов $\alpha_{1,x}, \dots, \alpha_{N_x,x}$ такой, что $\{x\} \times X_2 \subset P_{x,\alpha_{1,x}} \times Q_{x,\alpha_{1,x}} \cup \dots \cup P_{x,\alpha_{N_x,x}} \times Q_{x,\alpha_{N_x,x}}$. Для каждого $x \in X_1$ рассмотрим множество $A_x = Q_{x,\alpha_{1,x}} \cap \dots \cap Q_{x,\alpha_{N_x,x}}$. Множество A_x открыто, и $x \in A_x$ — следовательно, $\bigcup_x A_x = X_1$. В силу компактности X_1 найдется конечный набор точек $x_1, \dots, x_M$ такой, что $X_1 = A_{x_1} \cup \dots \cup A_{x_M}$. Следовательно, $X_1 \times X_2 = \bigcup_{i=1}^M \bigcup_{j=1}^{N_{x_i}} P_{x_i,\alpha_{j,x_i}} \times Q_{x_i,\alpha_{j,x_i}}$. Поскольку $P_{x_i,\alpha_{j,x_i}} \times Q_{x_i,\alpha_{j,x_i}} \subset U_{\alpha_{j,x_i}}$, множество $X_1 \times X_2$ покрыто конечным числом множеств U_α, то есть компактно.

3. Пусть $K \subset X$ компактно, X хаусдорфово. Пусть $a \in X \setminus K$. Для произвольной точки $b \in K$ пусть U_b, V_b — открытые подмножества в X такие, что $a \in U_b$, $b \in V_b$ и $U_b \cap V_b = \varnothing$ (их существование следует из хаусдорфовости). Тогда $K \subset \bigcup_{b\in K} V_b$, откуда вытекает, что найдутся такие точки $b_1, \dots, b_N$, что $K \subset V_{b_1} \cup \dots \cup V_{b_N}$. Множество $U \stackrel{\text{def}}{=} U_{b_1} \cap \dots \cap U_{b_N}$ открыто, содержит a и не пересекается ни с одиним V_{b_i} — следовательно, лежит в $X \setminus K$. Таким образом, $X \setminus K$ открыто, а K замкнуто.

5. Пусть X — метрическое пространство с метрикой ϱ, $a \in X$ и $Y \subset X$ не ограничено. Тогда ни для какого $r \geq 0$ множество $B_r \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in X \mid \varrho(a,b) < r\}$ не содержит Y. Множества B_r открыты (см. лекцию 2), покрывают X и, следовательно, Y. Но никакой конечный набор $B_{r_1}, \dots, B_{r_N}$ множества Y не покрывает, т.к. $B_{r_1} \cup \dots \cup B_{r_N} = B_{\max(r_1,\dots,r_N)}$.

4. Пусть X компактно, а $K \subset X$ замкнуто. Пусть $K \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, где $U_\alpha \subset X$ открыты. Тогда $X = (X \setminus K) \cup \bigcup_\alpha U_\alpha$, где все множества открыты. Поскольку X компактно, найдутся индексы $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ такие, что $X = (X \setminus K) \cup U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N}$. Отсюда $K \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N}$, так что K компактно.

6. Если подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно, то оно замкнуто по пункту 3 и ограничено по пункту 5. Обратно, пусть оно замкнуто и ограничено. Тогда оно является замкнутым подмножеством куба достаточно большого размера с центром в начале координат. Куб является декартовым произведением отрезков и, следовательно, компактен (пункт **??**). Отсюда X компактно (пункт 4). □

Следствие 1. *Образом непрерывной функции, определенной на отрезке, является отрезок.*

Доказательство. Образ $f([a,b])$ отрезка при непрерывном отображении компактен и, следовательно, ограничен. Пусть $A = \inf(f([a,b]))$, $B = \sup(f([a,b]))$. Поскольку образ замкнут, $A, B \in f([a,b])$. Если $A < x < B$ и $x \notin f([a,b])$, получим $f([a,b]) \subset (-\infty, x) \cup (x, +\infty)$, что противоречит связности $f([a,b])$. Следовательно, $f([a,b]) = [A,B]$. □

Пример 3. Утверждение 6 теоремы 2 нельзя перенести на произвольное метрическое пространство. Действительно, пусть $\ell_1 = \{(x_0, x_1, \dots) \mid \sum_n |x_n| < \infty\}$ — метрическое пространство с метрикой $\varrho(x,y) = \sum_n |x_n - y_n|$. Шар B радиуса 1 с центром в точке $0 = (0,0,\dots)$ ограничен (очевидно) и замкнут: если $x \notin B$, то открытый шар с центром в x и радиусом, меньшим $\varrho(x,0) - 1$, не пересекается с B по неравенству треугольника — следовательно, $\ell_1 \setminus B$ открыто. Пусть $a_n = (0,\dots,0,1,0,\dots) \in \ell_1$, где 1 стоит на n-ом месте. Положим $U_k = \ell_1 \setminus \{a_k, a_{k+1}, \dots\}$. Поскольку $\varrho(a_i, a_j) = 1$ при всех $i \neq j$, множество $\{a_k, a_{k+1}, \dots\}$ при любом k замкнуто, а U_k — открыто. Очевидно, $U_1 \subset U_2 \subset \dots$, и $\ell_1 = \bigcup_{k=1}^\infty U_k$. В то же время никакое конечное число множеств U_k не покрывают B: $U_{k_1} \cup \dots \cup U_{k_N} = U_{\max(k_1,\dots,k_N)} \not\supset B$. Следовательно, B некомпактно.

Пример 4. Пусть $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Докажем неравенство $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq (x_1 + \dots + x_n)/n$ между их средним арифметическим и средним геометрическим. В силу однородности (при умножении $x_i \mapsto tx_i$, где $t > 0$, неравенство сохраняется) достаточно доказать, что если $x_1 + \dots + x_n = 1$, то $x_1 \dots x_n \leq 1/n^n$.

Множество $\Delta = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n = 1\}$ ограничено и замкнуто (докажите); функция $f(x) = x_1 \dots x_n$ на нем непрерывна. Следовательно, образ $f(\Delta) \subset \mathbb{R}$ — компакт, то есть замкнут и ограничен. Следовательно, $A = \sup_{x\in\Delta} f(x)$ существует (конечен) и достигается в некоторой точке: $A = f(p_1, \dots, p_n)$.

Ясно, что нулей среди $p_1, \dots, p_n$ нет. Пусть $p_i < p_j$. Поскольку $f(p_1, \dots, p_i + t, \dots, p_j - t, \dots, p_n) = p_1 \dots \hat{p}_i \dots \hat{p}_j \dots p_n (p_i p_j + (p_j - p_i)t - t^2)$, для достаточно малого $t > 0$ получим $(p_1, \dots, p_i + t, \dots, p_j - t, \dots, p_n) \in \Delta$, но $f(p_1, \dots, p_i + t, \dots, p_j - t, \dots, p_n) > f(p_1, \dots, p_n) = A$, что противоречит определению A. Следовательно, $p_1 = \dots = p_n = 1/n$, и $A = 1/n^n$, что и требовалось доказать.