ЛЕКЦИЯ 2

Краткое содержание. Метрические и топологические пространства; непрерывность. Отделимость.

Топологией на множестве X называется семейство подмножеств $U \subset X$ (называемых открытыми) со следующими свойствами:

1) $X \subset X$ и $\varnothing \subset X$ открыты.
2) Объединение любого (в том числе бесконечного) семейства открытых множеств открыто.
3) Пересечение двух (и, следовательно, любого конечного числа) открытых множеств открыто.

Отображение $f : X \to Y$ двух топологических пространств называется непрерывным, если для каждого открытого подмножества $U \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid f(x) \in U\} \subset X$ открыт.

Пример 1 (простейшие примеры топологических пространств). Дискретное пространство X: все подмножества $U \subset X$ являются открытыми. Эквивалентное утверждение (почему?): любое одноточечное подмножество в X является открытым. Любое отображение из дискретного пространства в произвольное топологическое пространство является непрерывным. Отображение f из топологического пространства Y в дискретное непрерывно X, если прообраз произвольной *точки* $f^{-1}(a) \subset Y$ открыт.

Пространство-"клецка" (англ. knödel space): только подмножества $X \subset X$ и $\varnothing \subset X$ считаются открытыми. Всякое отображение из топологического пространства в X непрерывно; отображение из X в другое пространство непрерывно только если постоянно.

Пример 2 (вещественные числа). $X = \mathbb{R}$; множество $U \subset X$ открыто, если для всякого $a \in U$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U$. Свойства 1 и 2 очевидны (пустое множество открыто по определению); для доказательства свойства 3 возьмем $a \in U_1 \cap U_2$; тогда существуют $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ такие, что $(a-\varepsilon_i, a+\varepsilon_i) \subset U_i$ (здесь $i = 1, 2$); возьмем $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Пусть теперь $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция (в обычном смысле), и множество $U \subset \mathbb{R}$ открыто. Пусть $f(a) \in U$; тогда в силу открытости найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon) \subset U$. Поскольку f непрерывна в точке a, найдется такое $\delta > 0$, что для всякой точки $x \in (a-\delta, a+\delta)$ (т.е. всякой точки x, для которой $|x-a| < \delta$) верно неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, то есть $f(x) \subset (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon) \subset U$, то есть $x \in f^{-1}(U)$. Следовательно, $f^{-1}(U)$ — открытое множество. Обратно, пусть f такова, что прообраз любого открытого множества открыт. Интервал $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ открыт (проверьте!) — следовательно, его прообраз наряду с точкой a содержит некоторый интервал $(a-\delta, a+\delta)$. Это и означает, что функция f непрерывна в точке a (в обычном смысле).

Пример 3 (метрическое пространство — обобщение предыдущего примера). Пусть на множестве X задана функция двух аргументов (метрика, или расстояние) ϱ с неотрицательными значениями, обладающая следующими свойствами:

1) $\varrho(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$;
2) $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$;
3) $\varrho(a, c) \le \varrho(a, b) + \varrho(b, c)$.

Тогда в множестве X можно ввести структуру топологического пространства: множество $U \subset X$ называется открытым, если оно либо пусто, либо для любой его точки a существует $\varepsilon > 0$ такое, что если $\{x \in X \mid \varrho(x, a) < \varepsilon\}$ (такое множество называется открытым шаром радиуса ε с центром в a и обозначается $B_\varepsilon(a)$), то $x \in U$. Доказательство свойств 1–3 такое же, как для $\mathbb{R}$.

Отображение $f : X \to Y$ двух метрических пространств непрерывно, если для всякой точки $a \in X$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $x \in B_\delta(a)$ (то есть $\varrho(x, a) < \delta$), то $f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$ (то есть $\varrho(f(x), f(a)) < \varepsilon$). Доказательство этого факта такое же, как для $\mathbb{R}$, только нужно доказать, что произвольный шар $B_r(u)$ — открытое множество. Действительно, пусть $x \in B_r(u)$, и $0 < \varepsilon < r - \varrho(x, u)$ (число в правой части положительно, так что ε существует). Пусть $y \in B_\varepsilon(x)$; тогда по свойству 3 имеем $\varrho(y, u) \le \varrho(x, u) + \varrho(y, x) < r$, то есть $y \in B_r(u)$. Таким образом, $B_\varepsilon(x) \subset B_r(u)$, и открытость шара доказана.

Пример 4. Пусть G — связный конечный граф, X — множество его вершин. Расстоянием между вершинами a и b назовем наименьшую длину пути (количество ребер в нем), соединяющего эти вершины. Свойства 1–3 расстояния очевидны. Расстояние между точками X обязательно целое; в частности, шар $B_r(u)$ при $0 < r < 1$ содержит единственную точку — свой центр u. Следовательно, каждая точка X является открытым множеством, и топология в X дискретная.

Пример 5. Если X_1, X_2 — метрические пространства с расстояниями ϱ_1, ϱ_2, то можно определить расстояние на их декартовом произведении $\varrho^{(1)}((a_1,a_2),(b_1,b_2)) = \varrho_1(a_1,b_1) + \varrho_2(a_2,b_2)$. А можно определить расстояние и по-другому: $\varrho^{(\infty)}((a_1,a_2),(b_1,b_2)) = \max(\varrho_1(a_1,b_1), \varrho_2(a_2,b_2))$. Проверка свойств расстояния для $\varrho^{(1)}$ и $\varrho^{(\infty)}$ — упражнение. Заметим, что топологические пространства, определенные на множестве X по расстояниям $\varrho^{(1)}$ и $\varrho^{(\infty)}$, одинаковы: если подмножество $U \subset X$ открыто "в смысле $\varrho^{(1)}$", то оно открыто и "в смысле $\varrho^{(\infty)}$", и наоборот. Действительно, имеют место неравенства $\varrho^{(\infty)}(a,b) \le \varrho^{(1)}(a,b)$ и $\varrho^{(1)}(a,b) \le 2\varrho^{(\infty)}(a,b)$. Поэтому шар $B_r^{(1)}(u)$ содержит шар $B_r^{(\infty)}(u)$ (того же радиуса!) и содержится в шаре $B_{2r}^{(\infty)}(u)$ (вдвое большего радиуса). Это доказывает (почему?), что топологии совпадают.

Если $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$, то получаются два разных метрических пространства на множестве $X = \mathbb{R}^2$ (два разных расстояния на плоскости). Шар $B_r^{(\infty)}((u_1,u_2))$ это квадрат с центром в точке (u_1,u_2) со сторонами длины $2r$, параллельными осям координат. Шар $B_r^{(1)}((u_1,u_2))$ это тоже квадрат с центром в (u_1,u_2); его диагонали равны $2r$ и параллельны осям, а стороны, соответственно, имеют наклон $\pi/4$ к осям и длину $r\sqrt{2}$.

Можно также определить расстояние на $X = X_1 \times X_2$ формулой $\varrho^{(2)}((a_1,a_2),(b_1,b_2)) = \sqrt{\varrho_1^2(a_1,b_1) + \varrho_2^2(a_2,b_2)}$; доказательство свойств расстояния содержится в курсе анализа. Это расстояние определяет (почему?) на X ту же самую топологию, что и расстояния $\varrho^{(1)}$ и $\varrho^{(\infty)}$.

Пример 6. Пусть $X = \{(x_0, x_1, \dots)\}$ — множество бесконечных последовательностей действительных чисел, для которых ряд $\sum_{n=0}^\infty |x_n|$ сходится. Рассмотрим на X два расстояния: $\varrho^{(1)}(x,y) = \sum_{n=0}^\infty |x_n - y_n|$ и $\varrho^{(\infty)}(x,y) = \sup\{|x_n - y_n| \mid n = 0, 1, \dots\}$. Конечность расстояния $\varrho^{(\infty)}$ вытекает из того, что общий член сходящегося ряда стремится к нулю и, следовательно, ограничен; конечность $\varrho^{(1)}$ вытекает из неравенства $|x_n - y_n| \le |x_n| + |y_n|$, откуда вытекает, что ряд в определении $\varrho^{(1)}$ сходится. Свойства расстояния 1–3 проверяются тривиально (проделайте!).

Имеет место очевидное неравенство $\varrho^{(\infty)}(x,y) \le \varrho^{(1)}(x,y)$. Таким образом, $B_r^{(1)}(a) \subset B_r^{(\infty)}(a)$, и поэтому множество $U \subset X$, открытое "в смысле $\varrho^{(\infty)}$", будет открыто и "в смысле $\varrho^{(1)}$". Обратное неверно (т.е. топологии, определяемые в X метриками $\varrho^{(1)}$ и $\varrho^{(\infty)}$, разные!). Действительно, шар $B_1^{(1)}(0)$ (символом $0 \in X$ обозначена последовательность $(0, 0, \dots)$) не содержит ни одного шара $B_r^{(\infty)}(0) = \{(x_0, x_1, \dots) \mid \exists \sigma > 0 \forall n\ |x_n| < r - \sigma\}$ — какое бы ограничение сверху ни накладывалось на члены ряда, его сумма может быть больше 1. Следовательно, $B_1^{(1)}(0)$ не открыт в топологии, определяемой метрикой $\varrho^{(\infty)}$ (но, согласно примеру 3, открыт в топологии, определяемой $\varrho^{(1)}$).

Если отображение $f : X \to Y$, где Y — топологическое пространство, а X наделено расстоянием $\varrho^{(1)}$, непрерывно, то оно останется непрерывным и если расстояние заменить на $\varrho^{(\infty)}$; обратное неверно. С отображениями $g : Y \to X$ наоборот: если оно непрерывно при том что X наделено расстоянием $\varrho^{(\infty)}$, то при смене расстояния на $\varrho^{(1)}$ непрерывность не нарушится. В частности, тождественное отображение $X \to X$, где слева стоит пространство с метрикой $\varrho^{(1)}$, а справа — с метрикой $\varrho^{(\infty)}$, непрерывно, а обратное к нему отображение (тоже тождественное, но пространства другие!) — нет.

Пример 7. Пусть $X = \mathbb{Z}$. Определим $\varrho(m,n) = 2^{-k}$, где 2^k — наибольшая степень двойки, на которую делится число $|m - n|$ (если $m = n$, то $\varrho(m,n) = 0$ по определению) — иными словами, $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ таково, что $m - n = 2^k u$, где u — целое и нечетное. Это действительно расстояние (оно называется 2-адическим): свойства 1 и 2 очевидны, а для доказательства 3 заметим, что если $m - n = 2^k u$, $n - s = 2^l v$, где u, v нечетны, то $m - s = 2^k u + 2^l v$. Если $k > l$ (то есть $2^{-l} = \varrho(n,s) > \varrho(m,n) = 2^{-k}$), то $m - s = 2^l(v + 2^{k-l}u)$; число в скобках нечетно, откуда $\varrho(m,s) = 2^{-l} = \varrho(n,s)$. Аналогично, если $\varrho(m,n) > \varrho(n,s)$, то $\varrho(m,s) = \varrho(m,n)$. Если же $\varrho(m,n) = \varrho(n,s)$ (то есть $k = l$), в скобках стоит четное число (возможно, нуль), так что $\varrho(m,s) \le 2^{(-k-1)} < \varrho(m,n)$. Иными словами, здесь имеет место не просто неравенство пункта 3 (неравенство треугольника), а более сильное свойство: $\varrho(m,s) \le \max(\varrho(m,n), \varrho(n,s))$, причем если расстояния разные, то имеет место равенство, а если одинаковые, то неравенство строгое. Иными словами, по отношению к 2-адическому расстоянию любой треугольник является равнобедренным, и его основание меньше боковой стороны.

Топологическое пространство X называется хаусдорфовым, если для каждых двух точек $a, b \in X$, $a \ne b$, существуют открытые множества $U, V \subset X$ такие, что $a \in U$, $b \in V$ и $U \cap V = \varnothing$. Если структура топологического пространства в X порождена расстоянием, то оно обязательно хаусдорфово: достаточно взять $U = B_{r_1}(a)$, $V = B_{r_2}(b)$, где $r_1 + r_2 < \varrho(a,b)$: если бы существовала точка $c \in U \cap V$, то точки a, b, c нарушали бы неравенство треугольника. Примером нехаусдорфова пространство является пространство-"клецка" (с более чем одной точкой); есть и еще.

Пример 8 (пример конечного нехаусдорфова пространства). Пусть G — конечный ориентированный граф без петель и кратных ребер, и X — множество его вершин. Назовем подмножество $U \subset X$ открытым, если нельзя, двигаясь по стрелкам, прийти из точки $a \notin U$ в точку $b \in U$. Свойства топологического пространства проверить несложно. Например, свойство 3: если $a \notin U_1 \cap U_2$, то либо $a \notin U_1$, либо $a \notin U_2$; пусть для определенности верно первое. Тогда если из a можно прийти, двигаясь по стрелкам, в вершину b, то $b \notin U_1$, поскольку U_1 открыто, и, следовательно, $b \notin U_1 \cap U_2$. Таким образом, $U_1 \cap U_2$ открыто. Например, если граф состоит из двух вершин a и b, соединенных ребром, направленным от a к b, то открытыми являются подмножества $\varnothing$, $\{a\}$ и $\{a, b\}$ (а $\{b\}$ — нет). Такое пространство называется связным двоеточием (происхождение названия — позднее), и оно не хаусдорфово, т.к. открытое множество, содержащее b, обязательно содержит также и a.

Существуют стандартные операции, позволяющие из одних топологических пространств получать другие.

Пример 9 (топология подмножества). Если X — топологическое пространство и $Y \subset X$, то в Y можно ввести структуру топологического пространства, при котором множество $U \subset Y$ открыто тогда и только тогда, когда существует открытое подмножество $V \subset X$ такое, что $U = Y \cap V$. Например, подмножество $U \subset [0, 1]$ открыто, если оно является пересечением отрезка $[0, 1]$ с открытым подмножеством $V \subset \mathbb{R}$. Как нетрудно видеть, если топология в X порождена расстоянием ϱ, то топология на его подмножестве Y порождена тем же расстоянием, ограниченным на Y.

Пример 10 (топология декартова произведения). Пусть X_1, X_2 — топологические пространства, и $X = X_1 \times X_2$. Назовем подмножество $A \subset X$ открытым, если для каждой точки $a = (x_1, x_2) \in X$ найдутся открытые подмножества $U_1 \subset X_1$ и $U_2 \subset X_2$ такие, что $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ и $U_1 \times U_2 \subset A$.

Доказательство того, что таким образом определена топология, — упражнение. Если топология в пространствах X_1, X_2 порождена расстояниями ϱ_1, ϱ_2, то топология в $X_1 \times X_2$ порождена расстоянием $\varrho^{(\infty)}$ (или $\varrho^{(1)}$) из примера 5. Действительно шар $B_r^{(\infty)}((a_1, a_2))$ в метрике $\varrho^{(\infty)}$ — декартово произведение шаров $B_r(a_1) \subset X_1$ и $B_r(a_2) \subset X_2$.

Пример 11 (топология фактор-пространства). Пусть X — топологическое пространство, на котором задано отношение эквивалентности $\sim$. Пусть $Y = X/\sim$ — множество классов эквивалентности, а $p : X \to Y$ — отображение, сопоставляющее каждому элементу $a \in X$ класс, в который он входит. Множество $U \subset Y$ называется открытым, если множество $p^{-1}(U) \subset X$ открыто. На самом деле $p^{-1}(U)$ — объединение (как подмножеств в X) всех классов, входящих (как элементы) в множество U. Это действительно топология, поскольку $p^{-1}(\bigcup_\alpha U_\alpha) = \bigcup_\alpha p^{-1}(U_\alpha)$ и $p^{-1}(U_1 \cap U_2) = p^{-1}(U_1) \cap p^{-1}(U_2)$.