3. ГОМОТОПИИ, ПОВЕРХНОСТИ, ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА.

Конечным графом называется топологическое пространство, полученное склеиванием нескольких отрезков по их концам. Отрезки (их внутренние точки ни с чем не склеиваются) называются ребрами графа, а классы эквивалентности концов называются вершинами. Граф с одной вершиной и k ребрами называется букетом k окружностей.

Задача 1. а) Сформулируйте определение концов ребра, параллельных ребер и петли в графе. б) Докажите, что конечный граф компактен.

Задача 2. Пусть G — конечный граф, e — его ребро, не являющееся петлей. а) Докажите, что граф G/e, полученный стягиванием ребра e, гомотопически эквивалентен G. б) Докажите, что граф G гомотопически эквивалентен букету окружностей. Выразите число этих окружностей через количество вершин и ребер графа.

Свободной группой с двумя образующими называется группа $\mathcal{F}_2$, состоящая из всех конечных последовательностей из букв a, a^{-1}, b, b^{-1}, в которых буквы a и a^{-1}, а также b и b^{-1} не идут подряд. (Пустое слово тоже входит в группу.) Умножение x_1x_2 в группе состоит в приписывании последовательности x_2 справа к последовательности x_1; если на стыке образуются пары a и a^{-1} (в любом порядке) или b и b^{-1}, их вычеркивают.

Задача 3. Докажите, что свободная группа с двумя образующими является группой.

Пусть Γ — граф Кэли группы $\mathcal{F}_2$ с образующими a, b, т.е. бесконечный граф, вершины которого нумеруются элементами $\mathcal{F}_2$, и для произвольного слова w вершины, соответствующие словам w и wa, а также w и wb, соединены ребром. Топология на Γ порождается метрикой, ограничение которой на каждое ребро совпадает со стандартной метрикой на отрезке $[0,1]$, а расстояние между точками на различных ребрах равно длине кратчайшего пути, соединяющего эти ребра (уточните!).

Задача 4. а) Изобразите шар в Γ радиуса 3 с центром в вершине, соответствующей пустому слову. б) Докажите, что подмножество $A \subset \Gamma$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. в) Докажите, что группа $\pi_1(\Gamma)$ тривиальна. г) Стягиваемо ли пространство Γ?

Задача 5. Докажите, что если у непрерывного отображения $f : S^1 \to S^1$ имеется точка c такая, что $f^{-1}(c)$ состоит из n точек, то $|\deg f| \le n$.

Лентой Мебиуса называется фактор квадрата $[-1,1]^2$ по склейкам $(1,x) \sim (-1,-x)\,\forall x \in [-1,1]$.

Задача 6. а) Докажите, что лента Мебиуса гомотопически эквивалента окружности. б) Пусть $\mathbb{R}P^2 = S^2/(x \sim (-x)\,\forall x)$ — проективная плоскость, гомеоморфная сфере, у которой склеены диаметрально противоположные точки, и $p : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ — отображение склейки (переводящее каждую точку в пару, ее содержащую). Пусть $E \subset S^2$ — полоса вдоль экватора, лежащая между 10° южной и 10° северной широты. Докажите, что $p(E)$ гомеоморфно ленте Мебиуса, $p(\overline{S^2 \setminus E})$ гомеоморфно кругу, а $p(\partial E)$ — окружности. (Черта над множеством означает замыкание, а символ ∂ — границу.)

Сферой с g ручками называется правильный $4g$-угольник, стороны которого склеены в порядке $a_1, b_1, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ так, что у одноименных сторон склеены точки, переходящие друг в друга при осевой симметрии плоскости, переводящей стороны друг в друга.

Задача 7. Докажите, что сфера с g ручками является объединением замкнутых подмножеств A_1 и A_2, где A_1 гомеоморфно сфере с $g-1$ ручками с дыркой (дайте определение!), A_2 гомеоморфно ручке, то есть тору $S^1 \times S^1$ с дыркой, а $A_1 \cap A_2$ гомеоморфно окружности.

Задача 8. Докажите, что а) $\mathbb{R}P^2$ с выколотой точкой, б) тор $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ с выколотой точкой, в) бутылка Клейна с выколотой точкой, г) сфера с g ручками с выколотой точкой гомотопически эквивалентны букетам окружностей, и укажите число окружностей.

Задача 9. Докажите, что следующие пространства гомотопически эквивалентны: а) сфера S^2, в которой склеены две диаметрально противоположные точки, б) объединение сферы S^2 и ее диаметра, в) букет сферы S^2 и окружности S^1, г) $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$, где окружность в трехмерном пространстве — обычная окружность, лежащая в плоскости.

Задача 10. Пусть $f, g : S^1 \to S^1$ — непрерывные отображения. Докажите, что $\deg f \circ g = \deg f \cdot \deg g$.

Задача 11. Пусть X_n — букет n окружностей, $f_{n,k} : S^1 \to X_n$ — отображение, гомеоморфно переводящее окружность в k-ю окружность букета, $g_{n,k} : X_n \to S^1$ — отображение, гомеоморфно переводящее k-ю окружность букета в окружность-образ, а остальные окружности — в точку. а) Найдите степень отображения $g_{n,k} \circ f_{n,l} : S^1 \to S^1$. б) Докажите, что отображения $f_{n,k}$ и $g_{n,k}$ не гомотопны отображению в точку, а композиция $g_{n,k} \circ f_{n,l}$ при $k \neq l$ — гомотопна. в) Используя результаты пункта 11б и задачи 10, докажите, что букет $n > 1$ окружностей гомотопически не эквивалентен окружности. г) Докажите, что сферы с разным числом ручек не гомеоморфны друг другу.