

Домашнее задание 3

В задачах 3.1–3.3 речь идет о представлениях алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 .

3.1. а) Пусть V_n — неприводимое представление \mathfrak{sl}_2 со старшим весом n . Докажите, что

$$\mathrm{Sym}^2 V_n = \bigoplus_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} V^{2n-4i}.$$

б) Найдите аналогичную формулу для разложения $\Lambda^2 V_n$.

3.2 (Двойственность Эрмита). Докажите, что $\mathrm{Sym}^k V_n \cong \mathrm{Sym}^n V_k$.

3.3. Покажите, что $\Lambda^k V_n \cong \mathrm{Sym}^k V_{n+1-k}$.

3.4. Пусть V — стандартное (трехмерное) представление алгебры Ли \mathfrak{sl}_3 , ad — присоединенное представление той же алгебры. Разложите на неприводимые:

а) $V \otimes V$; **б)** $V \otimes V^*$; **в)** $V \otimes \mathrm{ad}$.

Решения этого задания нужно сдать в письменном виде до 12 мая 2014 г.