# ЛЕКЦИЯ 4

Краткое содержание. Гомотопии и гомотопическая эквивалентность.

Непрерывные отображения $f_0, f_1 : X \to Y$ называются гомотопными, если существует непрерывное отображение (называемое гомотопией) $F : X \times [0,1] \to Y$ такое, что $F(0,x) = f_0(x)$ и $F(1,x) = f_1(x)$.

*Пример* 1. Любое отображение $f : X \to \mathbb{R}^n$ гомотопно отображению в точку: гомотопия имеет вид $F(t,x) = (1-t)f(x)$.

*Пример* 2. Два отображения $f_0, f_1 : S^1 \to S^1$ гомотопны тогда и только тогда, когда имеют одинаковую степень. Доказательство см. лекцию 1 (в одну сторону) и задачу из листка 1 (в другую).

*Пример* 3. Пространство $X$ называется линейно связным, если любые два отображения $f : \mathrm{pt} \to X$, где pt — пространство из одной точки, гомотопны между собой.

**Лемма 1.** *Гомотопность отображений — отношение эквивалентности.*

*Доказательство.* Каждое отображение $f : X \to Y$ гомотопно самому себе: $F(t,x) = f(x)\,\forall t$. Если $F$ — гомотопия, связывающая отображения $f_0$ и $f_1$, то гомотопия $\tilde{F}(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} F(1-t,x)$ связывает $f_1$ с $f_0$. Если $F$ связывает $f_0$ с $f_1$, а $G$ — $f_1$ с $f_2$, то гомотопия, связывающая $f_0$ с $f_2$, имеет вид $H(t,x) = F(2t,x)$ при $0 \le t \le 1/2$ и $H(t,x) = G(2t-1,x)$ при $1/2 \le t \le 1$. □

**Лемма 2.** *Если $f_0, f_1 : X \to Y$ гомотопны и $g_0, g_1 : Y \to Z$ гомотопны, то $g_0 \circ f_0, g_1 \circ f_1 : X \to Z$ гомотопны.*

Доказательство очевидно.

Таким образом, каждой паре топологических пространств $X$ и $Y$ соответствует множество $\mathrm{Hom}(X,Y)$ классов гомотопии непрерывных отображений $X \to Y$, причем корректно определена композиция элемента $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ и элемента $g \in \mathrm{Hom}(Y,Z)$.

Топологические пространства $X$ и $Y$ называются гомотопически эквивалентными, если существуют непрерывные отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ такие, что $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$ и $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$. Пара отображений $(f,g)$ называется гомотопической эквивалентностью; если $X \subset Y$ и $f : X \to Y$ — отображение вложения (каждой точке сопоставляется она сама, но уже как точка $Y$), то гомотопическая эквивалентность называется деформационной ретракцией, а $X$ — деформационным ретрактом $Y$.

*Пример* 4. Пространство $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно точке (такие топологические пространства называются стягиваемыми). Например, точка $0 \in \mathbb{R}^n$ является деформационным ретрактом $\mathbb{R}^n$: $f : \{0\} \to \mathbb{R}^n$ — вложение, отображение $g : \mathbb{R}^n \to \{0\}$ единственно, $g \circ f = \mathrm{id}_{\{0\}}$ (других отображений $\{0\} \to \{0\}$ и не существует), и $f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (все отображается в нуль) гомотопно тождественному отображению: гомотопия $F(t,x) = (1-t)x$.

Так же доказывается, что всякое выпуклое подмножество $A \subset \mathbb{R}^n$ стягиваемо.

Из этих примеров видно, что гомотопически эквивалентные пространства могут быть не гомеоморфны, более того — не равномощны.

Нетрудно видеть (докажите!), что стягиваемость пространства $X$ эквивалентна тому, что тождественное отображение $X$ в себя гомотопно отображению, переводящему $X$ в одну точку.

*Пример* 5. Окружность $\omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$ — деформационный ретракт $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Ретракция: $F(t,x) = (1 - t + t/|x|)x$.

Если пространства $X$ и $Y$ гомотопически эквивалентны, то между множествами $\mathrm{Hom}(X,Z)$ и $\mathrm{Hom}(Y,Z)$ при произвольном $Z$ существует взаимно однозначное соответствие. А именно, если гомотопическая эквивалентность между $X$ и $Y$ задается парой отображений $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, то элементу $\varphi \in \mathrm{Hom}(X,Z)$ можно сопоставить элемент $\varphi \circ g \in \mathrm{Hom}(Y,Z)$, а элементу $\psi \in \mathrm{Hom}(Y,Z)$ — элемент $\psi \circ f \in \mathrm{Hom}(X,Z)$. Эти отображения взаимно обратны: $\varphi \circ g \circ f = \varphi$, поскольку $g \circ f : X \to X$ гомотопно тождественному отображению; аналогично $\psi \circ f \circ g = \psi$. Поскольку построенные отображения взаимно обратны, они взаимно однозначны. Аналогично строится взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathrm{Hom}(Z,X)$ и $\mathrm{Hom}(Z,Y)$ при произвольном $Z$.

*Пример* 6. Окружность $S^1$ не стягиваема (гомотопически не эквивалентна точке). Действительно, множество классов гомотопии непрерывных отображений $S^1 \to S^1$ бесконечно (класс определяется целым числом — степенью), в то время как существует только одно отображение $S^1$ в точку.

*Пример* 7. Плоскость $\mathbb{R}^2$ и полуплоскость $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ стягиваемы (поскольку выпуклы) и, тем самым, гомотопически эквивалентны. Тем не менее они не гомеоморфны: для произвольной точки $a \in \mathbb{R}^2$ ее дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ гомотопически эквивалентно окружности (см. пример 5), в то время как множество $\mathbb{R} \times [0, +\infty) \setminus \{(0,0)\}$ выпукло и, следовательно, стягиваемо и гомотопически не эквивалентно $S^1$ (пример 6). Отсюда вытекает, в частности, что если $a : D \to D$ — гомеоморфизм круга $D$ в себя, то он переводит точки граничной окружности в точки граничной окружности, а внутренние точки — во внутренние.