ЛЕКЦИЯ 5

Краткое содержание. Фундаментальная группа

Петлей в топологическом пространстве X с отмеченной точкой b называется непрерывное отображение $f : [0,1] \to X$ такое, что $f(0) = f(1) = b$. Гомотопией петель f_0 и f_1 называется непрерывное отображение $F : [0,1]^2 \to X$ такое, что $F(t,0) = f_0(t)$, $F(t,1) = f_1(t)$ для всех $t \in [0,1]$, и для любого $s \in [0,1]$ отображение $f_s \stackrel{\text{def}}{=} F(\cdot, s) : [0,1] \to X$ является петлей, т.е. $F(0,s) = F(1,s) = b$. Петли называются гомотопными, если между ними существует гомотопия; это отношение эквивалентности (проверьте!). Множество классов эквивалентности обозначается $\pi_1(X,b)$.

Пример 1. Множество $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0)$ состоит из одного элемента: любая петля f гомотопией $F(t,s) = (1-s)f(t)$ переводится в петлю $e(t) \equiv 0$.

Поскольку $f(0) = f(1)$, петля f порождает отображение $\tilde{f} : [0,1]/(0 \sim 1) \to X$, т.е. $\tilde{f} : S^1 \to X$. При отождествлении $[0,1]/(0 \sim 1) = S^1$ в окружности S^1 возникает отмеченная точка a, соответстсвующая склеенным концам отрезка; из определения петли следует, что $\tilde{f}(a) = b$.

Пример 2. Петли $f_0, f_1 \in \pi_1(S^1, b)$ гомотопны тогда и только тогда, когда отображения $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 : S^1 \to S^1$ имеют одинаковую степень.

Действительно, если $F : [0,1]^2 \to S^1$ — гомотопия, соединяющая петли f_0 и f_1, то отображения $\tilde{f}_0$ и $\tilde{f}_1$ соединяет гомотопия $\tilde{F} : S^1 \times [0,1] \to S^1$, где $\tilde{F}(t,s) = F(t,s)$, если $t \neq 0,1$, и $\tilde{F}(a,s) = b$ при всех s. Следовательно, отображения $\tilde{f}_0$ и $\tilde{f}_1 : S^1 \to S^1$ имеют одинаковую степень.

Обратно, пусть $\deg \tilde{f}_0 = \deg \tilde{f}_1$. Поскольку $\tilde{f}_0(a) = b = \tilde{f}_1(a)$, существуют поднятия $\varphi_0, \varphi_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ этих отображений такие, что $\varphi_0(0) = 0 = \varphi_1(0)$ (проекция $p : \mathbb{R} \to S^1$ определена так, чтобы $p(0) = a$); отсюда $\varphi_0(1) = \deg \tilde{f}_0 = \deg \tilde{f}_1 = \varphi_1(1)$. Положим теперь $\Phi(t,s) = (1-s)\varphi_0(t) + s\varphi_1(t)$; тогда $\Phi(0,s) = 0$ и $\Phi(1,s) = \deg \tilde{f}_0$ для всех $s \in [0,1]$. Тем самым определено отображение $F = p \circ \Phi : [0,1]^2 \to S^1$, которое является гомотопией между петлями f_0 и f_1.

Пусть $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ — пути, причем $\alpha(1) = \beta(0)$. Произведением путей называется путь $(\alpha \cdot \beta)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(2t)$ при $0 \le t \le 1/2$ и $= \beta(2t-1)$ при $1/2 \le t \le 1$. Если α, β — петли в пространстве X с отмеченной точкой b, то условие $\alpha(1) = \beta(0) (= b)$ выполнено всегда, так что произведение петель определено.

Теорема 1. *Умножение петель выдерживает гомотопию, т.е. определяет операцию на множестве $\pi_1(X,b)$. Относительно этой операции $\pi_1(X,b)$ является группой (называется фундаментальной группой пространства X с отмеченной точкой b).*

Доказательство. Если α_s — гомотопия, соединяющая петли α_0 и α_1, а β_s — гомотопия, соединяющая петли β_0 и β_1, то гомотопия $\alpha_s \cdot \beta_s$ соединяет петли $\alpha_0 \cdot \beta_0$ и $\alpha_1 \cdot \beta_1$. Тем самым операция на $\pi_1(X,b)$ определена.

Операция на $\pi_1(X,b)$ ассоциативна. Если $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ — петли, то петля $((\alpha_0 \cdot \alpha_1) \cdot \alpha_2)(t) = \alpha_{[u(t)]}(u(t))$, где $u : [0,1] \to [0,3]$ — кусочно-линейная функция, равная $4t$ при $0 \le t \le 1/2$ и $2t+1$ при $1/2 \le t \le 1$; $[\cdot]$ означает целую часть. Аналогично $(\alpha_0 \cdot (\alpha_1 \cdot \alpha_2))(t) = \alpha_{[v(t)]}(v(t)$, где v — кусочно-линейная функция, равная $2t$ при $0 \le t \le 1/2$ и $4t-1$ при $1/2 \le t \le 1$. Гомотопия петель задается формулой $A(t,s) = \alpha_{[(1-s)u(t)+sv(t)]}((1-s)u(t) + sv(t))$.

Операция на $\pi_1(X,b)$ обладает единицей, роль которой играет класс гомотопии тождественной петли $e(t) \stackrel{\text{def}}{=} b$. Доказательство того, что $[e]a = a[e] = a$, аналогично доказательству ассоциативности.

Операция на $\pi_1(X,b)$ обратима: обратным к классу петли γ является класс, содержащий петлю $\gamma^{-1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(1-t)$. Гомотопия между петлями $\gamma \cdot \gamma^{-1}$ и e строится аналогично доказательству ассоциативности. □

Пример 3. $\pi_1(S^1, b)$ (где b — произвольная точка) изоморфна группе $\mathbb{Z}$ целых чисел по сложению. Изоморфизм групп задается соответствием $f \mapsto \deg f$; в примере 2 было доказано, что это отображение корректно определено и инъективно.

Это отображение является гомоморфизмом групп: если A — поднятие петли α, а B — поднятие петли β с условиями $A(0) = B(0) = 0$, то поднятием петли $\alpha \cdot \beta$ является отображение $C(t) = A(2t)$ при $0 \le t \le 1/2$ и $= B(2t-1) + A(1)$ при $1/2 \le t \le 1$. Тогда $\deg \alpha \cdot \beta = C(1) = A(1) + B(1) = \deg \alpha + \deg \beta$. Построенный гомоморфизм групп сюръективен: у тождественного отображения $S^1 \to S^1$ степень равна 1, поэтому образ гомоморфизма deg содержит 1 и, следовательно, совпадает с $\mathbb{Z}$.

Пусть $\gamma : [0,1] \to X$ — путь, соединяющий точку $b_0 = \gamma(0)$ с точкой $b_1 = \gamma(1)$. Для произвольной петли α в X с отмеченной точкой b_1 обозначим $\gamma_*\alpha$ петлю с отмеченной точкой b_0, заданную формулой $\gamma_*\alpha(t) = \gamma(3t)$ при $0 \le t \le 1/3$, $= \alpha(3t-1)$ при $1/3 \le t \le 2/3$, и $= \gamma(3-3t)$ при $2/3 \le t \le 1$.

Теорема 2. *Отображение γ_* выдерживает гомотопию петель, т.е. определяет отображение $\pi_1(X, b_1) \to \pi_1(X, b_0)$. Это отображение является гомоморфизмом групп. Если пути γ_0 и γ_1 соединены гомотопией Γ такой, что $\Gamma(0,s) = b_0$ и $\Gamma(1,s) = b_1$ при всех $s \in [0,1]$, то гомоморфизмы $(\gamma_0)_*$ и $(\gamma_1)_*$ совпадают. Если путь γ является произведением путей α и β, то гомоморфизм $\gamma_* : \pi_1(X, \beta(1)) \to \pi_1(X, \alpha(0))$ — композиция гомоморфизмов $\beta_* : \pi_1(X, \beta(1)) \to \pi_1(X, \beta(0))$ и $\alpha_* : \pi_1(X, \alpha(1)) \to \pi_1(X, \alpha(0))$.*

Доказательство заключается в построении надлежащих гомотопий и оставляется в качестве упражнения.

Следствие. *Гомоморфизм γ_* является изоморфизмом групп. Если пространство X линейно связно, то фундаментальные группы $\pi_1(X, b)$ для всех $b \in X$ изоморфны. Если путь γ является петлей с $\gamma(0) = \gamma(1)$, то автоморфизм $\gamma_* : \pi_1(X, b) \to \pi_1(X, b)$ является внутренним: $\gamma_* f = \gamma^{-1} \cdot f \cdot \gamma$.*

Доказательство. Пусть $\gamma^{-1}(t) \overset{\text{def}}{=} \gamma(1-t)$ — путь, соединяющий точки $b_1 = \gamma(1)$ и $b_0 = \gamma(0)$. Тогда произведение путей $\gamma \cdot \gamma^{-1}$ гомотопно тождественному пути $e(t) = b_0$. Согласно теореме $\gamma_* \circ (\gamma^{-1})_* = (\gamma^{-1})_* \circ \gamma_* = e_* = \mathrm{id}$, откуда вытекает, что γ_* (и $(\gamma^{-1})_*$) — изоморфизм. Последнее утверждение следует непосредственно из определения. □

Пусть $f : X_1 \to X_2$ — непрерывное отображение, переводящее точку b_1 в точку $b_2 = f(b_1)$. Петле $\alpha : [0,1] \to X_1$, $\alpha(0) = \alpha(1) = b_1$ сопоставим петлю $f \circ \alpha : [0,1] \to X_2$, $(f \circ \alpha)(0) = (f \circ \alpha)(1) = b_2$.

Теорема 3. *Построенное отображение множеств петель выдерживает гомотопию, т.е. задает отображение $f_* : \pi_1(X_1, b_1) \to \pi_1(X_2, b_2)$. Это отображение является гомоморфизмом групп. Если $f : X_1 \to X_2$ и $g : X_2 \to X_3$ — непрерывные отображения, то $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ Если $F : X_1 \times X_2$ — гомотопия, соединяющая отображения $f_0 : X_1 \to X_2$ и $f_1 : X_1 \to X_2$, то $(f_1)_* = \varphi_* \circ (f_0)_*$, где $\varphi : [0,1] \to X_2$ — путь, заданный формулой $\varphi(t) = F(b_1, t)$.*

Доказательство. Если $A : [0,1]^2 \to X_1$ — гомотопия, соединяющая петли α_0 и α_1, то гомотопия $f(A(t,s))$ соединяет петли $f \circ \alpha_0$ и $f \circ \alpha_1$. Из определения умножения петель вытекает равенство $f \circ (\alpha \cdot \beta) = (f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)$, откуда вытекает второе утверждение. Третье утверждение вытекает непосредственно из определения. Проверка последнего утверждения (заключается в построении гомотопии) — упражнение. □

Пример 4. Пусть $f : S^1 \to S^1$ — отображение степени k. Тогда гомоморфизм $f_* : \pi_1(S^1, b_1) = \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} = \pi_1(S^1, b_2)$ представляет собой умножение на k. Действительно, образующей группы $\pi_1(S^1, b_1) = \mathbb{Z}$ является петля $\varphi(t) = e^{2\pi i t}$. Композиция $f \circ \varphi$ имеет степень k, так что переводится изоморфизмом deg в число $k \in \mathbb{Z}$. Тем самым $f_*(1) = k$, откуда и вытекает утверждение.

Следствие. *Фундаментальные группы линейно связных гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ — пара отображений, определяющих гомотопическую эквивалентность. Тогда $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$ по теореме 3. Поскольку $f \circ g$ гомотопно тождественному отображению X_2 в себя, в силу последнего утверждения теоремы 3 $(f \circ g)_* = \alpha_*$, где α — путь в X_2. Аналогично, $g_* \circ f_* = \beta_*$, где β — путь в X_1. Поскольку α_* и β_* — изоморфизмы (по следствию теоремы 2), $f_* : \pi_1(X, b) \to \pi_1(Y, f(b))$ и $g_* : \pi_1(Y, a) \to \pi_1(X, g(a))$ также являются изоморфизмами. □