ЛЕКЦИЯ 6

Краткое содержание. Накрытия.

Пусть B и E — топологическое пространство, F — дискретное топологическое пространство. Накрытием с базой B, тотальным пространством E и стандартным слоем F называется непрерывное отображение $p : E \to B$ такое, что для каждой точки $b \in B$ найдется открытое множество $U \ni b$ (называемое тривиализующей окрестностью) и непрерывное отображение $\varphi : p^{-1}(U) \to F$ (называемое тривиализацией), такое что отображение $p \times \varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ является гомеоморфизмом.

Пример 1 (тривиальное накрытие). B — произвольное топологическое пространство, F — произвольное дискретное топологическое пространство, $E = B \times F_{\mathfrak{A}}$, $p : E \to B$ — проекция на первый сомножитель. В качестве тривиализующей окрестности можно взять все B, а в качестве тривиализации — проекцию на второй сомножитель.

Пример 2 (универсальное накрытие над окружностью). $B = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $E = \mathbb{R}$, F — счетное дискретное пространство (гомеоморфное $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$), $p(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{2\pi it}$. В качестве тривиализующей окрестности точки b можно взять любую дугу $U \ni b$, отличную от всей окружности; для удобства (см. ниже) потребуем, чтобы $1 \in U$. Прообраз $p^{-1}(U)$ в таком случае состоит из счетного числа интервалов одной и той же длины, каждый из которых содержит ровно одно целое число. Тривиализация $\varphi : p^{-1}(U) \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ сопоставляет точке $t \in p^{-1}(U)$ целое число, лежащее в том же интервале, что и t.

Смысл термина “универсальное накрытие” выяснится позднее.

Пример 3. $E = S^n$ (сфера единичного радиуса в $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром в начале координат), $B = \mathbb{R}P^n$ (пространство, элементами которого являются прямые в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящие через начало координат). Отображение p ставит в соответствие точке $a \in S^n$ прямую, проходящую через a и начало координат. F — дискретное пространство из двух точек. Тривиализующая окрестность U прямой ℓ состоит из всех прямых, образующих с нею угол, меньший α (где α — произвольное число между 0 и $\pi/2$). Прообраз $p^{-1}(U) \subset S^n$ состоит из двух компонент связности, гомеоморфных кругу; ограничение p на каждую из компонент является гомеоморфизмом на U — отсюда вытекает, что p является накрытием.

Пример 4. Если F состоит из одной точки, то $p : E \to B$ — взаимно однозначное отображение. Обратное отображение p^{-1} непрерывно: действительно, пусть $U \subset E$ открыто. Для произвольного $b \in p(U)$ существует окрестность V такая, что $p^{-1} : V \to p^{-1}(V)$ — гомеоморфизм (в частности, непрерывное отображение). Множество $p^{-1}(V) \subset E$ открыто; отсюда следует, что $W = p^{-1}(V) \cap U$ открыто и непусто (содержит $p^{-1}(b)$). Но тогда p, ограниченное на W — гомеоморфизм, и $p(W) \subset p(U)$ — открытое множество. Тем самым для всякой точки $b \in p(U)$ найдется открытое множество W такое, что $b \in W \subset p(U)$. Следовательно, $p(U)$ открыто, и p^{-1} непрерывно.

Тем самым однолистное накрытие это гомеоморфизм.

Неформально говоря, тривиализация φ — способ “разметить” прообразы точек $c \in U$ элементами множества мощности $\mathfrak{A}$ так, чтобы ограничение p на множество прообразов, имеющих данную “метку”, было гомеоморфизмом на U. В частности, среди элементов прообраза $p^{-1}(c)$ произвольной точки должна найтись ровно одна точка с каждой из возможных меток. В частности, прообраз $p^{-1}(b) \subset E$ произвольной точки $b \in B$ гомеоморфен $F_{\mathfrak{A}}$ (то есть дискретен и имеет мощность $\mathfrak{A}$); поэтому при описании накрытия мощность $\mathfrak{A}$ часто не указывают. Это условие, однако, не достаточно для того, чтобы p было накрытием.

Пример 5. Отображение $p : [0,1) \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ задается равенством $p(t) = e^{2\pi it}$. Это отображение взаимно однозначно (прообраз каждой точки состоит из одной точки), но не является гомеоморфизмом, потому что S^1 компактно, а $[0,1)$ нет (на самом деле обратное отображение $p^{-1} : S^1 \to [0,1)$ разрывно в точке $1 \in S^1$). Следовательно, p не является накрытием.

Пусть X — топологическое пространство. Действием R группы G на X называется гомоморфизм группы G в группу гомеоморфизмов X: каждому элементу $g \in G$ сопоставлется гомеоморфизм $R_g : X \to X$ так, что $R_{g_1 g_2} = R_{g_2} \circ R_{g_1}$. Из равенства $e^2 = e$ (e — единица группы) вытекает, что $R_e = \mathrm{id}_X$, а из равенства $gg^{-1} = e$ — равенство $R_{g^{-1}} = R_g^{-1}$. Говорят, что точки $a, b \in X$ эквивалентны относительно действия, если существует элемент $g \in G$ такой, что $b = R_g(a)$. Это действительно отношение эквивалентности (проверьте!); соответствующие классы эквивалентности называются орбитами действия. Орбита, содержащая точку $a \in$

X, состоит из всех элементов вида $R_g(a)$, $g \in G$. Фактор X по введенному отношению эквивалентности называется пространством орбит и обозначается X/G (точнее было бы X/R, но так не принято); элементы этого фактора — орбиты.

Действие R называется точно дискретным, если для всякого элемента $a \in X$ существует открытое множество $U \ni a$ такое, что $R_g(U) \cap U \neq \varnothing$ только при $g = e$ (в этом случае, разумеется, $R_g(U) = U$). Если действие R точно дискретно, то естественное отображение $p : X \to X/G$, сопоставляющее каждой точке содержащую ее орбиту, является накрытием, где в роли пространства $F_{\mathfrak{A}}$ выступает группа G (с дискретной топологией). Действительно, пусть $b \in X/G$ — орбита, и $a \in b$ (т.е. $p(a) = b$). Возьмем у a окрестность U, упомянутую в определении точной дискретности, и пусть $V = p(U)$ (т.е. совокупность орбит всех точек $c \in U$). Множество $V \subset X/G$ открыто, т.к. $p^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} R_g(U) = \bigcup_{g \in G} R_{g^{-1}}^{-1}(U)$ открыто — это объединение открытых множеств (прообразов открытого множества U при непрерывном отображении $R_{g^{-1}}$).

Заметим теперь, что $R_{g_1}(U)$ и $R_{g_2}(U)$ при $g_1 \neq g_2$ не пересекаются: если $c \in R_{g_1}(U) \cap R_{g_2}(U)$, то $R_{g_1^{-1}}(c) \in U \cap R_{g_2 g_1^{-1}}(U)$, вопреки определению U. Тем самым можно определить тривиализацию $\varphi : p^{-1}(V) \to G$, полагая $\varphi(c) = g$ для всякого $c \in R_g(U)$. Теперь ограничение $p : R_g(U) \to V$ — гомеоморфизм (докажите!), так что p — накрытие.

Пример 6. Пусть $X = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$, и $R_n(x) = x + n$ при всех $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$. Это действие ($R_{n_1+n_2}(x) = x + n_1 + n_2 = R_{n_2}(R_{n_1}(x))$), оно точно дискретно (в качестве окрестности U точки $x \in \mathbb{R}$ можно взять любой содержащий x интервал длиной менее 1). Нетрудно проверить, что X/G гомеоморфно S^1, а отображение $p : X \to X/G$ — накрытие примера 2.

Пример 7. $X = S^n$, $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ — группа из двух элементов 0, 1. Действие $R_0 = \mathrm{id}_{S^n}$ (так всегда) и $R_1(x) = -x$ (диаметрально противоположная точка сферы). Это действие (т.к. $R_1^2 = \mathrm{id}_{S^n}$), оно точно дискретно (докажите!). Фактор X/G гомеоморфен $\mathbb{R}P^n$, а отображение $p : X \to X/G$ — накрытие примера 3.

Теорема 1 (о накрывающей гомотопии)**.** *Пусть $p : E \to B$ — накрытие.*

1) *для любого пути $\gamma : [0,1] \to B$ и любой точки $e \in E$ такой, что $p(e) = \gamma(0)$, существует и единствен путь $\Gamma : [0,1] \to E$ (поднятие пути γ) такой, что $\Gamma(0) = e$ и $p \circ \Gamma = \gamma$;*
2) *для любого отображения $\varphi : [0,1]^2 \to B$ и любого отображения $\Psi : [0,1] \to E$ такого, что $p(\Psi(s)) = \varphi(0,s)$, существует и единственно отображение $\Phi : [0,1]^2 \to E$ такое, что $p \circ \Phi = \varphi$ и $\Phi(0,s) = \Psi(s)$.*

Доказательство теоремы будет дано позднее; сейчас извлечем из нее следствия.

Следствие 1. *Пусть $p : E \to B$ — накрытие, причем E (и, следовательно, B) линейно связно; $b \in E$ — отмеченная точка. Тогда гомоморфизм $p_* : \pi_1(E,b) \to \pi_1(B,p(b))$ является мономорфизмом (вложением).*

Доказательство. Пусть $[\gamma] \in \operatorname{Ker} p_*$, где $\gamma : [0,1] \to E$, $\gamma(0) = \gamma(1) = b$ — петля в E. Это означает, что существует гомотопия $\varphi : [0,1]^2 \to B$ такая, что $\varphi(t,0) = p(\gamma(t))$, $\varphi(t,1) = p(b)$ для всех t и $\varphi(0,s) = \varphi(1,s) = p(b)$ для всех s. По теореме 1 существует гомотопия $\Phi : [0,1]^2 \to E$ такое, что $\Phi(t,0) = \gamma(t)$ и $p(\Phi(t,s)) = \varphi(t,s)$ для всех t и s. Тогда $p(\Phi(0,s)) = p(\Phi(1,s)) = p(b)$ и $\Phi(0,0) = \Phi(1,0) = b$. Прообраз $p^{-1}(p(b)) \subset E$ дискретен, отсюда $\Phi(0,s) = \Phi(1,s) = const. = \Phi(0,0) = \Phi(1,0) = b$ для всех s — иными словами, Φ это гомотопия петель с началом и концом в точке b. Также $p(\Phi(t,1)) = p(b)$ при всех t — в силу дискретности $p^{-1}(p(b))$ это означает, что $\Phi(t,1) = const. = \Phi(0,1) = b$. Следовательно, петля γ стягиваема, и $[\gamma] = 1 \in \pi_1(E,b)$. □

Пусть $\gamma : [0,1] \to B$ — петля в B, $\gamma(0) = \gamma(1) = p(b)$, и $\Gamma : [0,1] \to E$ — ее поднятие, для которого $\Gamma(0) = b$. Согласно теореме 1 гомотопия петли γ поднимается до гомотопии пути Γ с фиксированными концами (поскольку $p^{-1}(p(b))$ дискретно). Тем самым точка $\Gamma(1) \in p^{-1}(p(b))$ зависит только от класса гомотопии петли γ, т.е. от элемента $[\gamma] \in \pi_1(B,p(b))$. Тем самым определено отображение из $\pi_1(B,p(b))$ в $p^{-1}(p(b))$.

Следствие 2. *Пусть γ_1, γ_2 — петли, а Γ_1, Γ_2 — их поднятия, описанные выше. Соответствие $[\gamma] \mapsto \Gamma(1)$ определяет взаимно однозначное отображение между множеством классов смежности в группе $\pi_1(B,p(b))$ по подгруппе $p_*(\pi_1(E,b))$ и множеством точек $p^{-1}(p(b))$; точке b соответствует тривиальный смежный класс — сама подгруппа.*

Доказательство. Пусть γ_1, γ_2 — петли в B, а Γ_1, Γ_2 — их поднятия. Пусть $\gamma_1 = \gamma \cdot \gamma_2$, где $[\gamma] \in p_*(\pi_1(E,b)) \subset \pi_1(B,p(b))$. Это означает, что поднятие $\Gamma : [0,1] \to E$ петли $\gamma : [0,1] \to B$ является петлей: $\Gamma(0) = \Gamma(1) = b$. Следовательно, поднятие $\gamma_1 = \gamma \cdot \gamma_2$ есть $\Gamma_1 = \Gamma \cdot \Gamma_2$, и $\Gamma_1(1) = \Gamma_2(1)$.

Обратно, пусть $\Gamma_1(1) = \Gamma_2(1)$. Тогда поднятие петли $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}$ это путь $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2$, который является петлей — следовательно, $[\gamma] \in p_*(\pi_1(E,b))$.

Тем самым соответствие $[\gamma] \mapsto \Gamma(1)$ определяет инъективное отображение множества смежных классов $\pi_1(B,p(b))/p_*(\pi_1(E,b))$ в $p^{-1}(p(b))$. Пусть теперь $c \in p^{-1}(p(b))$. В силу линейной связности E существует путь $\Gamma : [0,1] \to E$ из b в c. Тогда $p \circ \Gamma : [0,1] \to B$ — петля, поднятием которой является Γ. Отсюда вытекает сюръективность построенного отображения. □

Следствие 3 (следствия 2)**.** *Если E линейно связно и односвязно ($\pi_1(E, b)$ тривиальна), то построенное отображение определяет биекцию между $\pi_1(B, p(b))$ и слоем $p^{-1}(p(b))$.*

Пример 8. Докажем вначале, что $\pi_1(S^n)$ тривиальна, если $n \geq 2$. Действительно, пусть $\gamma : [0, 1] \to S^n$ — петля. Поскольку $[0, 1]$ и S^n — метрические компакты, отображение γ равномерно непрерывно. Отсюда вытекает, что существует N такое, что при $t \in [i/N, (i + 1)/N]$ (и произвольном $i = 0, \ldots, N - 1$) точки $\gamma(t) \in S^n$ лежат в пределах одного полушария. Отсюда вытекает (почему?), что ограничение γ на $[i/N, (i + 1)/N]$ гомотопно отображению, переводящему $[i/N, (i + 1)/N]$ в дугу большого круга, соединяющую $\gamma(i/N)$ и $\gamma((i + 1)/N)$. Следовательно, γ гомотопна конечнозвенной (N-звенной) ломаной $\tilde{\gamma}$. Возьмем точку $a \in S^n$, через которую $\tilde{\gamma}$ не проходит (для ломаной такая точка существует); тогда $\tilde{\gamma}$ является непрерывным отображением $[0, 1] \to S^n \setminus \{a\}$. Пространство $S^n \setminus \{a\}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, стягиваемо; таким образом, $\tilde{\gamma}$ гомотопна петле-константе, что и требовалось.

Из доказанного утверждения, следствия 3 и примера 3 вытекает, что $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$ при $n \geq 2$ состоит из двух элементов; следовательно, это группа $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.