ЛЕКЦИЯ 7

Краткое содержание. Накрытия (продолжение): теорема о накрывающей гомотопии, морфизмы, классификация накрытий с данной базой.

Теорема 1. *Накрытие, базой которого является куб $[0,1]^n$ (для любого n), тривиально.*

Доказательство. Теорема вытекает из двух лемм:

Лемма 1. *Пусть $p : E \to [0,1]^n$ — накрытие со стандартным слоем F. Тогда существует k такое, что если каждое ребро куба $[0,1]^n$ разбить на 2^k равных частей, то накрытие над каждым из 2^{kn} образовавшихся маленьких кубиков будет тривиально.*

Доказательство леммы 1. Пусть это неверно, и для любого k найдется кубик M_k, над которым накрытие нетривиально. Пусть x_k — центр M_k. Поскольку $[0,1]^n$ — компакт, без ограничения общности можно считать, что $x_k \to x_* \in [0,1]^n$ при $k \to \infty$. Но у x_* имеется окрестность U, над которой накрытие тривиально (по определению накрытия). Очевидно, U содержит M_k при достаточно большом k — вопреки тому, что над M_k накрытие нетривиально. □

Лемма 2. *Пусть $[0,1]^n = \Pi_1 \cup \Pi_2$, где $\Pi_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n \le 1/2\}$, $\Pi_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n \ge 1/2\}$, и ограничение накрытия на Π_1 и Π_2 тривиально. Тогда накрытие p (над всем $[0,1]^n$) также тривиально.*

Доказательство леммы 2. По условию, существуют тривиализации $\varphi_1 : p^{-1}(\Pi_1) \to F$ и $\varphi_2 : p^{-1}(\Pi_2) \to F$ такие, что $\varphi_1 \times p : p^{-1}(\Pi_1) \to F \times \Pi_1$ и $\varphi_2 \times p : p^{-1}(\Pi_2) \to F \times \Pi_2$ — гомеоморфизмы. Тогда для произвольных $x_1, \dots, x_{n-1}$ возникает взаимно однозначное отображение $\psi_{x_1,\dots,x_{n-1}} : F \to F$, заданное формулой $\psi_{x_1,\dots,x_{n-1}} = \varphi_1 \circ \left(\varphi_2|_{p^{-1}(x_1,\dots,x_{n-1},1/2)}\right)^{-1}$. Пусть теперь $e \in E$, $p(e) = (x_1, \dots, x_n)$. Положим по определению $\varphi(e) = \varphi_1(e)$, если $p(e) \in \Pi_1$ (т.е. $x_n \le 1/2$), и $\varphi(e) = \psi_{x_1,\dots,x_{n-1}}(\varphi_2(e))$, если $p(e) \in \Pi_2$ (т.е. $x_n \ge 1/2$). Очевидно, φ является тривиализацией накрытия p над всем $[0,1]^n$, которое, тем самым, тривиально. □

Теорема теперь доказывается индукцией по размерности. Действительно, разобьем куб $[0,1]^n$ на 2^{kn} кубиков согласно лемме 1. По предположению индукции, накрытие над любым параллелепипедом $\{(x_1, \dots, x_n) \mid s/2^k \le x_n \le (s+1)/2^k\}$ тривиально. Теперь по лемме 2 оно тривиально над всем $[0,1]^n$. □

Пусть теперь $p : E \to B$ — накрытие со слоем F, и $f : B' \to B$ — произвольное непрерывное отображение. Положим $E' \stackrel{\text{def}}{=} \{(e,b') \in E \times B' \mid f(b') = p(e)\}$, и определим отображение $f^*p : E' \to B$ формулой $(f^*p)(e,b') = b'$. Это отображение является накрытием со слоем F и базой B': действительно, $(f^*p)^{-1}(b') = p^{-1}(f(b'))$; возьмем в качестве тривиализующей окрестности b' множество $U' = f^{-1}(U)$, где U — тривиализующая окрестность $f(b') \in B$. Тогда $(f^*p)^{-1}(U') = \{(e,b') \in U' \times p^{-1}(U) \mid f(b') = p(e)\}$, так что в качестве тривиализации φ' можно взять тривиализацию φ расслоения p над U: $\varphi'(e,b') \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(e)$.

Доказательство теоремы о накрывающей гомотопии, формулировку см. лекцию 6. Пусть $\gamma : [0,1] \to B$ — путь с началом в точке $b = \gamma(0)$. Накрытие γ^*p над отрезком $[0,1]$ тривиально по теореме 1. Его тотальное пространство $E' = \{(x,t) \in E \times [0,1] \mid p(x) = \gamma(t)\}$, а тривиализация — отображение $\varphi : E' \to F$ такое, что отображение $\Phi(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(x,t),t)$ — гомеоморфизм $E' \to F \times [0,1]$. Пусть $\varphi(e,0) \stackrel{\text{def}}{=} f_0 \in F$; тогда $\Gamma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi^{-1}(f_0,t)$ — искомое поднятие. Единственность поднятия — упражнение.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично (накрытие Φ^*p над $[0,1]^2$ также тривиально по теореме 1). □

Морфизмом накрытий $p_1 : E_1 \to B$ и $p_2 : E_2 \to B$ с одной и той же базой (но, вообще говоря, разными слоями F_1 и F_2) называется непрерывное отображение $f : E_1 \to E_2$ такое, что $p_2 \circ f = p_1$.

Теорема 2. *Морфизм между накрытиями $p_1 : E_1 \to B$ и $p_2 : E_2 \to B$ существует тогда и только тогда, когда группа $(p_1)_*(\pi_1(E_1,e_1)) \subset \pi_1(B,b)$ является подгруппой группы $(p_2)_*(\pi_1(E_2,e_2)) \subset \pi_1(B,b)$; здесь $e_2 = f(e_1)$ и $b = p_1(e_1) = p_2(e_2)$. Если морфизм существует, то он является накрытием со слоем $(p_2)_*(\pi_1(E_2,e_2))/(p_1)_*(\pi_1(E_1,e_1)) \subset F$.*

Доказательство. Пусть $f : E_1 \to E_2$ — морфизм. Класс гомотопии петли $\gamma : [0,1] \to B$, $\gamma(0) = \gamma(1) = b$, принадлежит $(p_1)_*(\pi_1(E_1, e_1))$, если существует петля $\Gamma : [0,1] \to E_1$, $\Gamma(0) = \Gamma(1) = e_1$, такая что $p_1 \circ \Gamma = \gamma$. Но тогда $\Psi \stackrel{\text{def}}{=} f \circ \Gamma : [0,1] \to E_2$ — петля в E_2, $\Psi(0) = \Psi(1) = e_2$, $p_2 \circ \Psi = \gamma$, так что класс петли γ принадлежит $(p_2)_*(\pi_1(E_2, e_2))$. Для точки $e_2 \in E_2$ положим $U_2 \stackrel{\text{def}}{=} p_2^{-1}(U)$, где U — тривиализующая окрестность точки b в накрытии p_1. Поскольку $f^{-1}(U_2) \subset p_1^{-1}(U)$, возьмем в качестве тривиализации тривиализацию накрытия p_1 над U. Пусть $\Gamma : [0,1] \to E_1$ — путь между точками $e_1 = \Gamma(0)$ и $e' = \Gamma(1)$. Точка $e' \in p_1^{-1}(b)$ принадлежит $f^{-1}(e_2)$ тогда и только тогда, когда петля $p_1 \circ \Gamma$ поднимается до петли в p_2, т.е. когда смежный класс петли $p_1 \circ \Gamma$ в $\pi_1(B, b)/(p_1)_*(\pi_1(E_1, e_1))$ принадлежит $(p_2)_*(E_2, e_2)/(p_1)_*(\pi_1(E_1, e_1))$. Отсюда вытекает, что f — накрытие с нужным слоем.

Обратно, пусть $(p_1)_*(\pi_1(E_1, e_1)) \subset (p_2)_*(\pi_1(E_2, e_2))$. Пусть $e \in E$, и $\Gamma : [0,1] \to E_1$ — путь, для которого $\Gamma(0) = e_1$ и $\Gamma(1) = e$. Пусть $\Gamma_2 : [0,1] \to E_2$ — путь, являющийся поднятием пути $p_1 \circ \Gamma : [0,1] \to B$. Положим по определению $f(e) = \Gamma_2(1)$. Если Γ' — другой путь, и Γ'_2 — поднятие $p_1 \circ \Gamma'$, то класс петли $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma' \cdot \Gamma^{-1}$ принадлежит $\pi_1(E_1, e_1)$. Следовательно, класс петли $\pi_1 \circ \lambda = (p_1 \circ \Gamma)^{-1} \cdot (p_1 \circ \Gamma')$ принадлежит $(p_1)_*(\pi_1(E_1, e_1)) \subset (p_2)_*(\pi_1(E_2, e_2))$. Отсюда вытекает, что пути Γ_2 и Γ'_2 имеют общие концы, так что $f(e)$ определено корректно. Очевидно, отображение f является морфизмом накрытий (докажите!). $\square$

Следствие 1. *Накрытия $p_1 : E_1 \to B$ и $p_2 : E_2 \to B$ изоморфны тогда и только тогда, когда подгруппы $(p_1)_*(\pi_1(E_1, e_1))$ и $(p_2)_*(\pi_1(E_2, e_2))$ группы $\pi_1(B, b)$ совпадают.*

Топологическое пространство X называется односвязным, если оно линейно связно и $\pi_1(X)$ тривиальна.

Следствие 2. *Если $p : E \to B$ — накрытие с односвязным слоем, а $p_1 : E_1 \to B$ — произвольное накрытие с линейно связным E_1, то существует морфизм из p в p_1.*

В силу следствия 2 накрытие с односвязной накрывающей называют универсальным.

Пример 1. Любая подгруппа группы $\mathbb{Z} = \pi_1(S^1)$ имеет вид $n\mathbb{Z}$ при некотором $n \geq 0$. Если $p_n : S^1 \to S^1$ — накрытие вида $p(z) = z^n$, то $(p_n)_*(\pi_1(S^1)) = n\mathbb{Z}$; здесь $n > 0$. Кроме того, существует стандратное накрытие $p_0 : \mathbb{R} \to S^1$, для которого $(p_0)_*(\pi_1(\mathbb{R})) = 0$. Отсюда вытекает, что никаких накрытий с базой S^1, кроме p_n, не существует. Имеем $n\mathbb{Z} \subset k\mathbb{Z}$, если $n = km$ при $m \in \mathbb{Z}$. Между накрытиями p_n и p_k в этом случае имеется морфизм — накрытие $z \mapsto z^m$.

Назовем пространство X локально линейно связным, если для каждой точки $x \in X$ и открытого подмножества $U \ni x$ найдется линейно связное открытое подмножество V, для которого $x \in V \subset U$; аналогично определяется локально односвязное пространство.

Лемма 3. *Пути $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ такие, что $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ и $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, гомотопны как пути с фиксированными концами, тогда и только тогда, когда петля $\gamma_0 \cdot \gamma_1^{-1}$ стягиваема (как петля с началом и концом в $\gamma_0(0)$). В частности, если X односвязно, то любые два пути γ_0 и γ_1 с общими концами гомотопны (как пути с фиксированными концами).*

Доказательство. $\gamma_0 = \gamma_1 \cdot \gamma_1^{-1} \cdot \gamma_0 \sim \gamma_1$, если петля $\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_0$ стягиваема. Обратно, если $\gamma_0 \sim \gamma_1$, то $\gamma_0 \cdot \gamma_1^{-1} \sim \gamma_1 \cdot \gamma_1^{-1}$ — петля стягиваема. $\square$

Теорема 3. *Пусть B — линейно связное, локально линейно связное и локально односвязное топологическое пространство. Тогда для произвольной подгруппы $G \subset \pi_1(B, b)$ существует (и единственно, согласно следствию 1) накрытие $p : E \to B$ с линейно связным пространством E такое, что $p_*(\pi_1(E, e)) = G$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $G = \{1\}$. Поскольку p_* — мономорфизм, это означает, что $\pi_1(E, e)$ тривиальна. Пусть теперь E — множество путей $\gamma : [0,1] \to B$ таких, что $\gamma(0) = b$, по модулю гомотопии с фиксированными концами (своими для каждого пути). Базу топологии в E составляют множества $A_{U,\lambda}$, где $U \subset B$ — открытое односвязное подмножество, а $\lambda : [0,1] \to B$ соединяет точку $b = \lambda(0)$ с точкой $\lambda(1) \in U$. Множество $A_{U,\lambda} \subset E$ состоит из классов гомотопии всех путей γ таких, что $\gamma(1) \in U$, и γ гомотопно $\lambda \cdot \psi$, где $\psi : [0,1] \to U$ — единственный с точностью до гомотопии (согласно лемме 3) путь, для которого $\psi(0) = \lambda(1)$ и $\psi(1) = \gamma(1)$. Доказательство того, что таким образом действительно получается топология, — упражнение (нужно доказать, что пересечение $A_{U_1,\lambda_1} \cap A_{U_2,\lambda_2}$ является объединением множеств вида $A_{U,\lambda}$).

Определим отображение $p : E \to B$ формулой $p(\gamma) = \gamma(1)$ и докажем, что это накрытие со слоем $F = \pi_1(B, b)$. Действительно, пусть $U \ni a$ — односвязное открытое подмножество. Зафиксируем путь $\gamma_0 : [0,1] \to B$, $\gamma_0(0) = b$, $\gamma_0(1) = a$. Пусть $\gamma : [0,1] \to B$ таково, что $\gamma(0) = b$, $\gamma(1) \in U$ — иными словами, $\gamma \in p^{-1}(U)$. Положим по определению $\varphi(\gamma) = [\gamma \cdot \psi \cdot \gamma_0^{-1}] \in \pi_1(B, b)$, где квадратные скобки означают класс гомотопии петли, а $\psi : [0,1] \to U$ — путь, для которого $\psi(0) = \gamma(1)$, $\psi(1) = a$.

Отображение $\varphi : p^{-1}(U) \to \pi_1(B, b)$ — тривиализация. Действительно, если $p(\gamma_1) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1) = p(\gamma_2)$, и $\varphi(\gamma_1) = \varphi(\gamma_2)$, имеет место равенство $\gamma_1 \cdot \psi\gamma_0^{-1} \sim \gamma_2 \cdot \psi\gamma_0^{-1}$ (заметим, что ψ один и тот же!), то есть петля $\gamma_1 \cdot \psi\gamma_0^{-1} \cdot (\gamma_2 \cdot \psi\gamma_0^{-1})^{-1} = \gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}$ стягиваема. Согласно лемме 3, это эквивалентно тому, что пути γ_1 и γ_2

гомотопны, то есть представляют один и тот же элемент E. Тем самым отображение $p \times \psi : p^{-1}(U) \to U \times \pi_1(B, b)$ взаимно однозначно. Доказательство того, что это гомеоморфизм, — упражнение.

Тем самым построено накрытие над B со слоем $\pi_1(B, b)$. Отмеченной точкой в $e \in E$ служит класс гомотопии стягиваемой петли в точке b. Тотальное пространство накрытия линейно связно: точку e и точку $\gamma \in E$, где $\gamma : [0,1] \to B$ — путь, для которого $\gamma(0) = b$, можно соединить путем $\Gamma : [0,1] \to E$, где $\Gamma(t)$ — класс гомотопии пути $\gamma_t(s) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(ts)$. Тот же путь Γ служит поднятием пути γ в накрытии p. Теперь если γ — петля, то $\Gamma(1) = [\gamma] \in \pi_1(B, b)$ — отсюда вытекает (почему?), что E односвязно, и $p_*(\pi_1(E, e)) \subset \pi_1(B, b)$ тривиально.

Пусть теперь $G \subset \pi_1(B, b)$ произвольно, и $p : E \to B$ — построенное выше универсальное накрытие. Назовем пути $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to B$ эквивалентными, если $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = b$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, и класс гомотопии петли $\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}$ принадлежит G. Определим пространство E_G как фактор E по этому отношению эквивалентности, и отображение $p_G : E_G \to B$ определим формулой $p_G(\gamma) = \gamma(1)$. Тогда $p_G : E_G \to B$ — накрытие со слоем $\pi_1(B, b)/G$, и $(p_G)_*(\pi_1(E_G, e)) = G$ (докажите!). $\square$

Пример 2. Пусть E — бесконечное троичное дерево (см. листок 3), $p : E \to S^1 \vee S^1$ — накрытие над букетом двух окружностей. Вершины дерева E нумеруются элементами свободной группы $\mathcal{F}_2$ с двумя образующими a и b; вершины w и w' соединены ребром, если $w' = wq$, где $q \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$. Пусть $\gamma : [0,1] \to S^1 \vee S^1$ — петля, $\gamma(0) = \gamma(1) = v$ (вершина букета), и $\Gamma : [0,1] \to E$ — поднятие, $\Gamma(0) = \Gamma(1) = e$ (единица группы). Поскольку E односвязно (это задача листка 3), классы гомотопии петель находятся во взаимно однозначном соответствии с вершинами $\Gamma(1) \in \mathcal{F}_2$.

На E действует группа $\mathcal{F}_2$: если точка x принадлежит ребру, соединяющему вершины $w \in \mathcal{F}_2$ и $wq\mathcal{F}_2$, и $u \in \mathcal{F}_2$, то $R_u(x)$ принадлежит ребру, соединяющему ux и uxq, причем делит его в том же отношении. Это действие является правой единицей по отношению к проекции $p : E \to S^1 \vee S^1$: $p(R_u(x)) = p(x)$ для всех $x \in E$ и $u \in \mathcal{F}_2$. Отсюда вытекает, что $\Gamma_u \stackrel{\text{def}}{=} R_u \circ \Gamma$ — поднятие петли γ, для которого $\Gamma_u(0) = \Gamma_u(1) = u$. В силу единственности если Γ_1, Γ_2 — поднятия петель γ_1, γ_2 (со стандартными начальными точками), то поднятием петли $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_1 \cdot \gamma_2$ является путь $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_1 \cdot (R_{\Gamma_1(1)} \circ \Gamma_2)$, откуда $\Gamma(1) = \Gamma_1(1)\Gamma_2(1)$. Тем самым соответствие $[\gamma] \mapsto \Gamma(1)$ является изоморфизмом групп $\pi_1(S^1 \vee S^1) \to \mathcal{F}_2$.