4. НАКРЫТИЯ И ТЕОРЕМА ВАН КАМПЕНА.

Задача 1. а) Отображение $f : S^n \to \mathbb{R}P^n$ ставит в соответствие точке A единичной сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ с центром в начале координат O прямую OA. Докажите, что f — двулистное накрытие. Вычислите $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$. б) Постройте двулистное накрытие $g : C \to M$, где $C = S^1 \times [0,1]$ — цилиндр, а M — лента Мебиуса. в) Докажите, что $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$ и вычислите гомоморфизм фундаментальных групп $g_* : \pi_1(C) \to \pi_1(M)$, где g — отображение пункта 1б. г) Пусть $L \subset S^2$ — окрестность экватора (от $10°$ южной до $10°$ северной широты). Докажите, что образ $f(L) \subset \mathbb{R}P^2$, где f — отображение пункта 1а (при $n = 2$), гомеоморфен ленте Мебиуса, а накрытие $f : L \to f(L)$ эквивалентно накрытию g пункта 1б.

Действием группы G на топологическом пространстве X называется гомоморфизм R в группу гомеоморфизмов X. Иными словами, действие R сопоставляет каждому элементу $g \in G$ гомеоморфизм $R_g : X \to X$ так, что $R_{gh} = R_g R_h$, $R_e = \mathrm{id}_X$ и $R_{g^{-1}} = R_g^{-1}$. Действие R называется точно дискретным, если для всякого $a \in X$ найдется окрестность U такая, что множества $R_g(U)$ для различных $g \in G$ не пересекаются (в частности, не пересекаются с $R_e(U) = U$).

Задача 2. а) Докажите, что естественное отображение $p : X \to X/R$ в пространство орбит точно дискретного действия R (каждой точке сопоставляется ее орбита) является накрытием. б) Докажите, что если X линейно связно, $a \in X$ — отмеченная точка, а $\alpha = p(a) \in X/R$ — ее орбита, то подгруппа $p_*(\pi_1(X,a)) \subset \pi_1(X/R,\alpha)$ нормальна, и факторгруппа $\pi_1(X/R,\alpha)/p_*(\pi_1(X,a))$ изоморфна G. В частности, если X односвязно, то $\pi_1(X/R,\alpha) = G$. в) Докажите обратное утверждение: если $p : X \to Y$ — накрытие, X линейно связно, и подгруппа $p_*(\pi_1(X,a)) \subset \pi_1(Y,p(a))$ нормальна, то существует точное дискретное действие R группы $G \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1(Y,p(a))/\pi_1(X,a)$ на пространстве X такое, что X/R гомеоморфно Y, а накрытие p эквивалентно естественному накрытию $X \to X/R$. г) Пусть $p : E \to B$ — накрытие. Докажите, что подгруппа $p_*(\pi_1(E,u)) \subset \pi_1(B,b)$ тогда и только тогда *не является* нормальной, когда существуют два пути $\Gamma_1, \Gamma_2 : [0,1] \to E$ такие, что $p \circ \Gamma_1 = p \circ \Gamma_2$ является петлей в B, но Γ_1 — петля, а Γ_2 — нет.

Задача 3. Докажите, что следующие действия групп — точно дискретные, и опишите пространства орбит: а) действие $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ на S^n: элемент $x \neq 0$ переводит каждую точку сферы в противоположную; б) действие $\mathbb{Z}^n$ на $\mathbb{R}^n$ параллельными переносами на векторы с целыми координатами; в) действие на $\mathbb{R}^2$ группы, порожденной параллельным переносом $T(x,y) = (x+1,y)$ (на единичный вектор вдоль оси абсцисс) и скользящей симметрией $S(x,y) = (-x,y+1)$ (относительно оси ординат, сдвиг на единичный вектор).

Задача 4. а) Докажите, используя задачу 3в, что группа $\pi_1(K)$, где K — бутылка Клейна, бесконечна и некоммутативна. б) Докажите, что $\pi_1(K)$ порождена двумя образующими a и b, связанными единственным соотношением $abab^{-1} = 1$. в) Постройте двулистное накрытие $p : \mathbb{T}^2 \to K$ и опишите подгруппу (индекса 2) $p_*(\pi_1(\mathbb{T}^2)) \subset \pi_1(K)$.

Пусть $X_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}^2)^n \mid x_i \neq x_j \forall i \neq j\}$. На X_n действует перестановками точек группа S_n, обозначим Y_n пространство орбит.

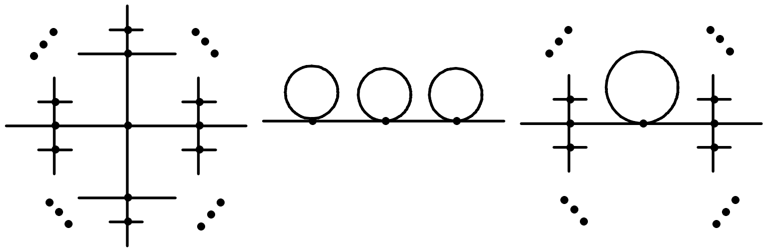
Задача 5. а) Докажите, что X_2 и Y_2 гомотопически эквивалентны окружности. б) Пусть $f : X_n \to X_{n-1}$ задано формулой $f(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_{n-1})$. Докажите, что $f_* : \pi_1(X_n) \to \pi_1(X_{n-1})$ — эпиморфизм. в) Докажите, что действие группы S_n на X_n точно дискретно (и, следовательно, естественная проекция $X_n \to Y_n$ — накрытие). г) Выведите из результатов задач 5б и 5в, что $\pi_1(Y_3)$ бесконечна и некоммутативна.

Пусть теперь B — букет двух окружностей, P и Q, с общей точкой b. Рассмотрим пространства (бесконечные графы) E, изображенные на рисунке 1. Для каждого из них определим отображение $p : E \to B$, при котором отмеченные точки (вершины графа) переходят в b, горизонтальные ребра — в окружность P, а петли и вертикальные ребра — в окружность Q.

Задача 6. а) Докажите, что все три построенных отображения — накрытия. б) Докажите, что $\pi_1(B)$ — свободная группа с двумя образующим.

Указание. Для доказательства необходимо уточнить конструкцию графов: какие именно в них вершины? Какие из них соединены ребрами? Как именно устроено отображение на ребрах?

Аналогично доказывается (как?), что фундаментальная группа букета из k окружностей — свободная группа $\mathcal{F}_k$ с k образующими.



a b c

Рис. 1. Накрытия над букетом двух окружностей

Задача 7. а) Вычислите подгруппу $p_*(\pi_1(E))$ для графа b. Нормальна ли эта подгруппа? Если нет, то укажите в графе пути Γ_1 и Γ_2, удовлетворяющие условию задачи 2г, а если да, то опишите точное дискретное действие на E, как в задаче 2в. Опишите $\pi_1(E)$. б) Те же вопросы про граф c.

Задача 8. а) Топологическое пространство Γ является связным n-листным накрытием букета из k окружностей. Докажите, что Γ гомеоморфно конечному графу, и найдите число вершин и ребер этого графа. б) Используя результат задачи 8а, докажите, что если группа G является подгруппой свободной группы $\mathcal{F}_k$ с k образующими, и индекс $|\mathcal{F}_k : G| = n$ конечен, то G изоморфна свободной группе $\mathcal{F}_p$. Выразите число p через n и k. Продумайте возможность чисто алгебраического доказательства этого утверждения.

Задача 9. Вычислите фундаментальную группу следующих пространств с помощью теоремы ван Кампена и, если возможно, также с помощью накрытий: а) $\mathbb{R}P^2$; б) $\mathbb{R}P^n$; в) сфера с g ручками; г) $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}/(z,w) \sim (ze^{2\pi i/3}, we^{-2\pi i/3})$; д) дополнение в $\mathbb{R}^3$ к окружностям $\omega_1 = \{(x,y,0) \mid (x-2)^2+y^2 = 1\}$ и $\omega_2 = \{(x,y,0) \mid (x+2)^2 + y^2 = 1\}$; е) дополнение в $\mathbb{R}^3$ к окружностям $\omega_1 = \{(x,y,0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ и $\omega_2 = \{(x,0,z) \mid (x-1)^2 + z^2 = 1\}$.