ЛЕКЦИЯ 9

Краткое содержание. Теорема ван Кампена.

Свободным произведением групп $G_1, \dots, G_N$ называется группа $G \stackrel{\text{def}}{=} G_1 * \dots * G_N$, элементами которой являются слова вида $g_1 \dots g_k$, где каждое g_i — элемент одной из групп G_k, причем $g_i \neq 1$, и g_i и g_{i+1} для всех i принадлежат различным группам. Умножение в G — приписывание слов друг к другу; при этом если на стыке образуется пара элементов $g, h \in G_k$, то они заменяются $gh \in G_k$; если при этом получается $1 \in G_k$, то она вычеркивается, и процесс "сокращения" прололжается. Пустое слово тоже входит в группу G и является единицей группы.

Если даны группы $H_1, \dots, H_m$ и набор гомоморфизмов $\varphi_{ij} : H_i \to G_j$, то амальгамированным произведением $G_1, \dots, G_N$ по гомоморфизмам φ_{ij} нзывается фактор $G_1 * \dots * G_N$ по нормальной подгруппе, порожденной всеми элементами $\varphi_{ki}(h)\varphi_{kj}(h)^{-1}$, для всех $1 \leq i < j \leq N$, $1 \leq k \leq m$ и всех $h \in H_k$.

Пусть $X = A_1 \cup \dots \cup A_N$ — линейно связное топологическое пространство, $A_i \subset X$ открыто, и $b \in A_i$ при всех i. Предположим, что A_p и $A_p \cap A_q$ линейно связны для всех $1 \leq p < q \leq N$, и обозначим $\iota_{p,q} : A_p \cap A_q \to A_p$ отображение включения (точка $x \in A_p \cap A_q$ переходит в себя, но как элемент A_p).

Теорема 1 (ван Кампен). *Пусть $X = A_1 \cup \dots \cup A_N$ — линейно связное топологическое пространство, $A_i \subset X$ открыто, и $b \in A_i$ при всех i. Если A_p, $A_p \cap A_q$ и $A_p \cap A_q \cap A_r$ линейно связны для всех p, q и r, то $\pi_1(X, b)$ изоморфна амальгамированному произведению групп $\pi_1(A_p, b)$, $1 \leq p \leq N$, по гомоморфизмам $(\iota_{p,q})_* : \pi_1(A_p \cap A_q, b) \to \pi_1(A_p, b)$.*

Доказательство. Существует естественный гомоморфизм $\mu : G \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1(A_1, b) * \dots * \pi_1(A_N, b) \to \pi_1(X, b)$: элементу $g_1 \dots g_k$ сопоставляется класс гомотопии петли $\gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_k$, где $\gamma_s : [0,1] \to A_{i_s} \subset X$ — представитель класса $g_s \in \pi_1(A_{i_s}, b)$. Докажем, что μ — эпиморфизм.

Лемма 1. *Для любого непрерывного отображения $f : [0,1]^n \to X$ существуют разбиения $0 = s_0^{(i)} < s_1^{(i)} < \dots < s_{N_i}^{(i)} = 1$ отрезка $[0,1]$, $i = 1, \dots, n$, такие что для произвольных $i_1, \dots, i_n$ существует $k_{i_1,\dots,i_n}$ такое, что $f([s_{i_1}^{(1)}, s_{i_1+1}^{(1)}] \times \dots \times [s_{i_n}^{(n)}, s_{i_n+1}^{(n)}]) \subset A_{k_{i_1,\dots,i_n}}$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}$, заданную формулой $f(x) = \max_{k=1}^N \{r > 0 \mid B_r(x) \subset A_k\}$; здесь $B_r(x)$ — шар радиуса r с центром в точке x. Поскольку $X = A_1 \cup \dots \cup A_N$, функция f всюду строго положительна. В силу непрерывности f она отделена от нуля: $\exists \delta > 0 \forall x \in [0,1]^n \, f(x) \geq \delta$. Теперь в качестве $s_j^{(i)}$ можно взять любые такие разбиения, что диаметр каждого элементарного параллелепипеда не превосходит δ. □

Пусть $\gamma : [0,1] \to X$ — петля в X. Из леммы вытекает, что существуют $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_M = 1$ такие, что $\gamma([s_k, s_{k+1}]) \subset A_{i_k}$ для некоторого i_k. Поскольку A_{i_k} линейно связно и содержит b, петля γ гомотопна $\gamma_1 \cdot \psi_1^{-1} \cdot \psi_1\gamma_2 \cdot \psi_2^{-1} \cdot \psi_2 \cdots \gamma_M$, где γ_k — путь, являющийся ограничением петли γ на отрезок $[s_{k-1}, s_k]$, а $\psi_k : [0,1] \to A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k}$ — произвольный путь, соединяющий точку b с точкой $\gamma(s_k) \in A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k}$. Поскольку $\psi_{k-1}^{-1} \cdot \gamma_k \cdot \psi_k$ — петля в A_{i_k}, получим, что μ — эпиморфизм, так что $\pi_1(X, b) = G/\operatorname{Ker}(\mu)$.

Для произвольного $x \in \pi_1(A_p \cap A_q, b)$ имеют место равенства по модулю $\operatorname{Ker}(\mu)$ (т.е. соотношения в группе $\pi_1(X, b) = G/\operatorname{Ker}(\mu))$ $\iota_{p,q})_*(x) = \iota_{q,p})_*(x)$ (поскольку классы x, $(\iota_{p,q})_*(x)$ и $(\iota_{q,p})_*(x)$ представляются одной и той же петлей); назовем это (p,q)-соотношением. Таким образом, теорема сводится к утверждению, что любой элемент ядра μ можно привести к единичному, применяя (p,q)-соотношения.

Пусть $g_1 \dots g_k \in \operatorname{Ker}(\mu)$, где $g_s \in \pi_1(A_{i_s}, b)$ для каждого s. Реализуем каждый элемент g_s петлей в соответствующем A_{i_s}; тогда их произведение — стягивая петля $\gamma : [0,1] \to X$. Пусть $\Gamma : [0,1]^2 \to X$ — стягивающая гомотопия: $\Gamma(t, 0) = \gamma(t)$, $\Gamma(t, 1) = b$, $\Gamma(0, s) = \Gamma(1, s) = b$. Из леммы вытекает, что существуют $0 = s_0^{(1)} < s_1^{(1)} < \dots < s_{M_1}^{(1)} = 1$ и $0 = s_0^{(2)} < s_1^{(2)} < \dots < s_{M_2}^{(2)} = 1$ такие, что $\Gamma([s_{k-1}^{(1)}, s_k^{(1)}] \times [s_{l-1}^{(2)}, s_l^{(2)}]) \subset A_{i_{kl}}$ для некоторого i_{kl}. Для удобства переименуем прямоугольники $[s_{k-1}^{(1)}, s_k^{(1)}] \times [s_{l-1}^{(2)}, s_l^{(2)}]$ в Q_m, $1 \leq m \leq M_1 M_2$, где индекс $m = m(k,l)$ возрастает с ростом k, а при равных k — с ростом l. Кроме того, сдвинем немного границы прямоугольников Q_m так, чтобы по-прежнему $\Gamma(Q_{m(k,l)}) \subset A_{i_{kl}}$, и в одной точке $v \in [0,1]^2$ пересекалось не более трех прямоугольников.

Для каждой вершины v разбиения зададим путь $\psi_v : [0,1] \to A_p \cap A_q \cap A_r$, для которого $\psi_v(0) = b$, $\psi_v(1) = \Gamma(v)$, где A_p, A_q и A_r — подмножества, соответствующие трем прямоугольникам, пересекающимся в вершине v. Если теперь $\lambda \subset [0,1]^2$ — ломаная, проходящая по линиям сетки через вершины $v_{k_1}, \dots, v_{k_M}$, то

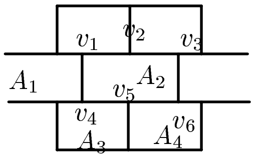

Рис. 1. Соотношение

$\Gamma \circ \lambda = \gamma_{k_1 k_2} \psi_{v_1}^{-1} \psi_{v_1} \gamma_{k_2 k_3} \psi_{v_2}^{-1} \psi_{v_2} \dots$, где по определению путь γ_{pq} — ограничение петли $\Gamma \circ \lambda$ на отрезок между вершинами v_{i_p} и v_{i_q}. Пусть $g_{i_{k-1} i_k} \in \pi_1(A_p, b)$ — элемент, представленный петлей $\psi_{v_{i_{k-1}}} \gamma_{i_{k-1} i_k} \psi_{v_{i_k}}^{-1}$; здесь A_p — часть разбиения, соответствующая прямоугольнику, примыкающему справа к участку ломаной λ между вершинами $v_{i_{k-1}}$ и v_{i_k}. Тем самым произвольной ломаной λ сопоставлен элемент $\gamma_{i_1 i_2} \dots \gamma_{i_{M-1} i_M} \in G$.

Пусть λ_i — ломаная в квадрате $[0,1]^2$, отделяющая прямоугольники с номерами, не большими i, от остальных прямоугольников (так что λ_0 — нижняя граница, а $\lambda_{M_1 M_2}$ — верхняя). Без ограничения общности можно считать, что элемент группы G, соответствующий λ_0, есть $g_1 \dots g_k$ (этого можно добиться, измельчая разбиение $s_i^{(1)}$ — уточните!). Пусть теперь γ_i — ограничение гомотопии Γ на ломаную λ_i.

Ломаная λ_i на рис. 1 содержит участок $v_1 v_4 v_5 v_6$, а ломаная λ_{i+1} вместо него — участок $v_1 v_2 v_3 v_6$. Соответствующие элементы $\mathrm{Ker}(\mu)$ отличаются заменой фрагмента $g_{14}^{(i)} g_{45}^{(i)} g_{56}^{(i)}$ на фрагмент $g_{12}^{(i+1)} g_{23}^{(i+1)} g_{36}^{(i+1)}$; при этом $g_{14}^{(i)} \in \pi_1(A_1, b)$, $g_{45}^{(i)} \in \pi_1(A_3, b)$, $g_{56}^{(i)} \in \pi_1(A_4, b)$, а $g_{12}^{(i+1)}, g_{23}^{(i+1)}, g_{36}^{(i+1)} \in \pi_1(A_2, b)$. Гомотопия Γ переводит петлю, представляющую первый элемент, в петлю, представляющую второй; поэтому элемент $g_{14}^{(i)} g_{45}^{(i)} g_{56}^{(i)}$ после применения к его сомножителям $(1,2)$-соотношения, $(3,2)$-соотношения и $(4,2)$-соотношения соответственно превращается в $g_{12}^{(i+1)}, g_{23}^{(i+1)}, g_{36}^{(i+1)}$; отсюда и вытекает утверждение теоремы.

$\square$

Пример 1. Пусть $X = S^n$, где $n \geq 2$; A_1 и A_2 — полушария (немного увеличенные: от 1° южной широты до северного полюса и наоборот). Тогда A_1, A_2 гомеоморфны шарам, а $A_1 \cap A_2$ гомотопически эквивалентно S^{n-1} и, следовательно, линейно связно. Поскольку шары стягиваемы, из теоремы ван Кампена вытекает, что $\pi_1(S^n)$ тривиальна. Для $n = 1$ это утверждение, как известно, неверно — причина в том, что $A_1 \cap A_2$ в этом случае линейно не связно.

Пример 2. Пусть $X = S^1 \vee S^1$, а A_1, A_2 — малые окрестности двух окружностей (т.е. A_i — окружность плюс короткая дуга на второй окружности, содержащая вершину букета). Тогда A_1, A_2 гомотопически эквивалентны окружностям, так что $\pi_1(A_1) = \pi_1(A_2) = \mathbb{Z}$. Пересечение $A_1 \cap A_2$ стягивaето, так что $\pi_1(A_1 \cap A_2) = 1$. Из теоремы ван Кампена вытекает, что $\pi_1(X) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ — свободная группа с двумя образующими.

Пример 3. Пусть $X = S^1 \times S^1$ — двумерный тор. Поскольку $S^1 = [0,1]/(0 \sim 1)$, пространство X гомеоморфно квадрату $[0,1]^2$, у которого отождествлены все точки $(t,0) \sim (t,1)$ и $(0,s) \sim (1,s)$. Пусть $A_1 = (0,1)^2$ (внутренность квадрата), A_2 — тонкая окрестность рамки квадрата. Подмножество A_1 стягиваемо, так что $\pi_1(A_1) = 1$. Подмножество A_2 ретрагируется на рамку квадрата, которая гомеоморфна $S^1 \vee S^1$, откуда $\pi_1(A_2) = \mathcal{F}(a,b)$ — свободная группа с образующими a и b, которым соответствуют петли $\gamma_a(t) = (t,0)$ и $\gamma_b(t) = (0,t)$. Пересечение $A_1 \cap A_2$ гомотопически эквивалентно окружности; образующая группы $\pi_1(A_1 \cap A_2) = \mathbb{Z}$ — петля $\gamma_a \gamma_b \gamma_a^{-1} \gamma_b^{-1}$. Из теоремы ван Кампена вытекает, что $\pi_1(X)$ задается двумя образующими a и b с единственным соотношением $aba^{-1}b^{-1} = 1$, то есть $ab = ba$. Тем самым $\pi_1(X) = \mathbb{Z}^2$.