ЛЕКЦИЯ 10

Краткое содержание. Фундаментальная группа симплициального пространства.

Обозначим $B_k \subset \mathbb{R}^k$ шар радиуса 1 с центром в начале координат.

Лемма 1 (о свободной точке). *Пусть $m > n$ и $f : B_n \to B_m$ — непрерывное отображение, для которого $f(\partial B_n) \subset \partial B_m$. Тогда существует гомотопия $F : B_n \times [0,1] \to B_m$ такая, что $F(x,0) = f(x)$, $F(y,t) = f(y)$ при $y \in \partial B_n$, и $F(B_n, 1) \neq B_m$.*

Доказательство. Поскольку B_n компакт, отображение f равномерно непрерывно. Разобьем B_n на симплексы так, чтобы $|f(x) - f(y)| < 1/10$ при x, y из одного симплекса. Теперь рассмотрим отображение g, которое совпадает с f во всех вершинах симплексов и линейно на любом симплексе. Положим теперь $h(u) \stackrel{\text{def}}{=} f(u)$, если $|f(u)| \geq 2/3$, $h(u) \stackrel{\text{def}}{=} g(u)$, если $|f(u)| \leq 1/3$, и $h(u) = (2 - 3|f(u)|)g(u) + (3|f(u)| - 1)f(u)$, если $1/3 \leq |f(u)| \leq 2/3$. Гомотопию F теперь определим просто как $F(x,t) = th(x) + (1-t)f(x)$. На подмножестве (непустом!) $U = \{u \mid f(u) < 1/3\}$, отображение $F(\cdot, 1) = h$ кусочно-линейно; поскольку U — открытое подмножество $\mathbb{R}^m$, оно содержит по крайней мере один m-мерный шар, откуда вытекает (почему?), что образ h не совпадает с U. □

Стандартным n-мерным симплексом называется множество $\Delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_0, \dots, x_n \geq 0, x_0 + \dots + x_n = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$; его гранью – подмножество $\Delta_n^{i_1,\dots,i_k} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta_n \mid x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = 0\}$. Число $n - k$ называется размерностью грани; действительно, грань размерности d гомеоморфна Δ_d.

Симплициальным пространством называется хаусдорфово топологическое пространство X, разбитое на замкнутые подмножества X_k, для каждого из которых зафиксирован гомеоморфизм $\varphi_k : \Delta_{n_k} \to X_k$, причем для любых p, q существуют $i_1, \dots, i_a$ и $j_1, \dots, j_b$ такие, что $X_p \cap X_q = \varphi_p(\Delta_{n_p}^{i_1,\dots,i_a}) = \varphi_q(\Delta_{n_q}^{j_1,\dots,j_b})$. Число n_k называется размерностью X_k; n-остовом $\mathrm{sk}_n(X)$ называется объединение всех граней размерности не больше n всех подмножеств X_k; $\mathrm{sk}_n(X)$ имеет естественную структуру симплициального пространства. Точка $b \in \mathrm{sk}_0(X)$ называется вершиной симплициального пространства X.

Лемма 2.
1) *Симплициальное множество линейно связно тогда и только тогда, когда линейно связен его 1-остов.*
2) *Пусть X — линейно связное симплициальное множество, b — его вершина. Тогда отображение $(\iota_1)_* : \pi_1(\mathrm{sk}_1(X), b) \to \pi_1(X, b)$ — эпиморфизм,*
3) *а $(\iota_2)_* : \pi_1(\mathrm{sk}_2(X), b) \to \pi_1(X, b)$ — изоморфизм; здесь $\iota_j : \mathrm{sk}_j(X) \to X$ — тавтологическое вложение ($j = 1, 2$).*

Доказательство. Предположим, что $\mathrm{sk}_1(X)$ линейно связен. Прямолинейным отрезком можно соединить точку произвольного симплекса X_k с точкой на его границе; индукцией по n выводим теперь, что $\mathrm{sk}_n(X)$ линейно связен для любого n. Поскольку $X = \bigcup_n \mathrm{sk}_n(X)$, X тоже линейно связен.

Обратно, пусть X линейно связен. Пусть $a, b \in \mathrm{sk}_1(X)$, и $\gamma : [0,1] \to X$ — путь, их соединяющий. Поскольку $[0,1]$ компактен, $\gamma([0,1])$ пересекается лишь с конечным набором симплексов. Если $\gamma(t) \in X_k$, где X_k — симплекс размерности $n > 1$, то по лемме 1 путь γ можно подвергнуть гомотопии с фиксированными концами так, чтобы $X_k \not\subset \gamma([0,1])$. Пусть (после гомотопии) $x \in e_\alpha^{(n)} \setminus \gamma([0,1])$. Симплекс (любой размерности) без одной точки деформационно ретрагируется на свою границу; поэтому существует гомотопия пути γ с фиксированными концами такая, что после нее путь уже не пересекает внутренность симплекса X_k и не пересекает никаких новых клеток размерности n и больше. Действуя по индукции, получим, что существует путь $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathrm{sk}_1(X)$, соединяющий a и b (и гомотопный γ). Этим доказано утверждение 1. Если же γ была петлей с началом и концом в b, то тем самым доказано и утверждение 2.

Пусть теперь $[\gamma] \in \mathrm{Ker}(\iota_1)_*$, т.е. существует гомотопия $\Gamma : [0,1]^2 \to X$ такая, что $\Gamma(t,0) = \gamma(t)$, $\Gamma(0,s) = \Gamma(1,s) = \Gamma(t,1) = b$ при всех t, s. Аналогично доказательству эпиморфности докажем, что существует гомотопия $\tilde{\Gamma} : [0,1]^2 \to \mathrm{sk}_2(X)$, совпадающая с Γ на границе квадрата (и гомотопная Γ, но нам это неважно). Следовательно, петля γ стягивается в точку по $\mathrm{sk}_2(X)$, то есть $(\iota_2)_*$ — изоморфизм. □

Пусть теперь X — сиплициальное пространство, содержащее конечное число симплексов, причем все размерности не выше 2. Тогда $\mathrm{sk}_1(X)$ — конечный граф; обозначим его Γ. Выберем в Γ отмеченную точку — вершину b и содержащее ее максимальное дерево T, и пусть $\mathcal{T} \subset X$ — его открытая окрестность (точки всех симплексов, отстоящие от ребер T на расстояние, меньшее $1/10$; здесь метрика на каждом симплексе отнормирована так, чтобы любой двумерный симплекс имел диаметр 1). Рассмотрим следующие открытые подмножества в X:

- Для каждого ребра (одномерного симплекса) e пусть A_e — объединение $\mathcal{T}$ и множества точек, находящихся от ребра e на расстоянии меньше $1/10$.
- Для каждой грани (двумерного симплекса) f пусть B_f — объединение $\mathcal{T}$ и множества точек, находящихся от f на расстоянии меньше $1/10$.

Очевидно, построенные множества A_e и B_f для всех e и f удовлетворяют условиям теоремы ван Кампена. При этом, как нетрудно видеть,

- Если ребро e принадлежит дереву T, то $A_e = \mathcal{T}$ стягиваемо и $\pi_1(A_e) = 1$. В противном случае A_e гомотопически эквивалентно окружности и $\pi_1(A_e) = \mathbb{Z}$. Выберем ориентацию (начальную и конечную вершину) на ребре e и возьмем в качестве образующей α_e группы $\pi_1(A_e)$ петлю, проходящую по дереву T от вершины b до начала ребра e, затем по этому ребру, и затем от конца ребра до b обратно по дереву T. Если ориентировать ребро противоположным образом, то получится петля, гомотопная α_e^{-1}.
- Если два из трех ребер грани f лежат в дереве T (все три ребра там лежать не могут, т.к. образуют цикл), то B_f стягиваемо и $\pi_1(B_f) = 1$. Если одно ребро лежит в T, а два других, e_1 и e_2 — нет, то B_f гомотопически эквивалентно окружности и $\pi_1(B_f) = \mathbb{Z}$. Ориентируем грань f (выберем циклический порядок ее вершин); тогда ребра e_1 и e_2 также будут ориентированы. Тогда в качестве образующей группы $\pi_1(B_f)$ можно выбрать петлю α_{e_1} (или гомотопную ей петлю α_{e_2}). Если никакое из ребер e_1, e_2, e_3 грани f не принадлежит дереву, то B_f гомотопически эквивалента букету двух окружностей. $\pi_1(B_f)$ в этом случае — свободная группа с двумя образующими, в качестве которых можно взять α_{e_1} и α_{e_2} (ориентация ребер проистекает из выбранной ориентации грани f). Петля α_{e_3} в этом случае гомотопна $(\alpha_{e_1}\alpha_{e_2})^{-1}$ (предполагается, что ориентация f циклически упорядочивает ребра как e_1, e_2, e_3).
- $A_{e_1} \cap A_{e_2} = \mathcal{T}$ стягиваемо, поэтому соотношений не дает.
- Если ребро e не принадлежит грани f, то $A_e \cap B_f = \mathcal{T}$ стягиваемо. В противном случае $A_e \cap B_f = A_e$, причем если $\iota : A_e \to B_f$ — вложение, то $\iota_* : \pi_1(A_e) \to \pi_1(B_f)$ переводит α_e в одноименную образующую.
- Если две грани f_1, f_2 не имеют общего ребра, то $B_{f_1} \cap B_{f_2} = \mathcal{T}$ стягиваемо. Если они имеют общее ребро e (по определению симплициального множества — ровно одно), то $B_{f_1} \cap B_{f_2} = A_e$, так что новых соотношений опять-таки нет.

Из теоремы ван Кампена теперь вытекает такое утверждение: $\pi_1(X)$ изоморфно группе, образующими которой служат элементы α_e, соответствующие (произвольным образом) ориентированным ребрам графа $\Gamma = \mathrm{sk}_1(X)$, не входящим в его максимальное дерево T (которое нужно заранее выбрать). Соотношения в группе соответствуют граням, у которых не более одного ребра лежит в T. Если в T лежит одно ребро, то соотношение выглядит $\alpha_{e_1} = \alpha_{e_2}$, где e_1, e_2 — два других ребра (соответствующим образом ориентированные; смена ориентации означает смену образующей на обратную). Если в T не лежит ни одно ребро, то соотношение выглядит $\alpha_{e_1}\alpha_{e_2}\alpha_{e_3} = 1$, где e_1, e_2, e_3 — ребра, перечисленные в порядке ориентации грани и сами соответствующим образом ориентированные.