

*Задача 1.* В локальных координатах  $(x_1, \dots, x_n)$  на многообразии заданы коэффициенты матрицы связности  $\theta_i^j = \sum \Gamma_{i,k}^j dx_k$  на касательном расслоении к этому многообразию. Докажите, что связность на касательном расслоении симметрична если и только если  $\Gamma_{i,j}^k = \Gamma_{j,i}^k$ .

*Задача 2.* Рассмотрим вложение  $x \rightarrow (x, x^2)$  прямой в евклидову плоскость (в ортогональных координатах на плоскости).

а) Найдите результат параллельного переноса касательного вектора  $\frac{\partial}{\partial x}$  в точке 0 в точку 1 для связности Леви-Чивита в индуцированной метрике на прямой. Зависит ли этот перенос от пути, соединяющего точки 0 и 1?

б) Найдите символ Кристоффеля этой связности.

*Задача 3.* Пусть  $u(t_1, t_2)$  поверхность в римановом многообразии,  $v$  - векторное поле вдоль этой поверхности. Докажите, что  $[\frac{D}{dt_1}, \frac{D}{dt_2}]v = R(\frac{\partial u}{\partial t_1}, \frac{\partial u}{\partial t_2})v$ .

*Задача 4.* Верно ли, что диаметр геодезически полного связного риманова многообразия бесконечен?

*Задача 5.* Докажите, что из каждой точки некомпактного геодезически полного риманова многообразия можно выпустить геодезический луч, такой что любой его отрезок минимален.

*Задача 6.* Докажите, что касательное векторное поле к геодезической вариации есть поле Якоби вдоль исходной геодезической. Верно ли обратное?

*Задача 7.* Выясните, постоянно ли вдоль геодезической скалярное произведение поля Якоби и касательного вектора к геодезической.